

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РФ

Корпачева М.А.

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

**Часть 2
Практикум**

Учебное пособие

Брянск 2026

ББК 22.14я73
К-68

Корпачева М.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Часть 2. Учебное пособие. Брянск, 2026. - 177 с.

Пособие содержит необходимый практический материал по комбинаторике, теории вероятностей и статистике предусмотренной школьной программой. Каждый параграф содержит примеры с решениями и задачи для самостоятельного решения. Книга может быть использована в качестве пособия для обучающихся общеобразовательных школ.

Рецензенты:

Малинникова Н.А. кандидат педагогических наук, доцент

Еловикова Ю.А. кандидат физико-математических наук, доцент

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Элементы комбинаторики	7
1. Правила суммы и произведения.....	7
2. Факториал.....	10
3. Сочетания, размещения и перестановки без повторений.....	12
4. Комбинаторные соединения.....	18
5. Сочетания, размещения и перестановки с повторениями	21
6. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля.....	24
Глава 2. Элементы теории вероятностей	26
1. Классификация событий.....	26
2. Классическое определение вероятности	28
3. Геометрическое определение вероятности	36
4. Статистическое определение вероятности	41
5. Операции над событиями.....	43
6. Вероятность суммы и произведения событий	51
7. Формула полной вероятности. Формула Байеса.....	59
8. Схема Бернулли	68
Глава 3. Элементы математической статистики	77
1. Случайные величины.....	77
2. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева	90
Глава 4. Практикум в формате ЕГЭ	94
1. Базовый уровень.....	94
I. Классическое определение вероятности.....	94
II. Статистическое определение вероятности	102
III. Геометрическое определение вероятности	103
IV. Противоположные события.....	105
V. Сумма и произведение событий.....	107
2. Профильный уровень.....	110
I. Классическое, статистическое геометрическое определения вероятности.....	110
II. Сумма и произведение событий. Полная группа событий.....	125
III. Формула полной вероятности. Формула Байеса.....	138
IV. Схема Бернулли	151
V. Элементы математической статистики.....	153
VI. Задачи повышенного уровня сложности.....	157
Ответы	165
Литература	177

ВВЕДЕНИЕ

Введение разделов «Элементы комбинаторики», «Элементы теории вероятностей», «Элементы математической статистики» в школьный курс математики было рекомендовано в основной школе с 2003-2004 учебного года в соответствии с письмом Министерства образования Российской Федерации от 23 сентября 2003 г. №03-93 ИН/13-03, и с 2006-2007 уч.года стало обязательным для изучения. Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) основного общего образования от 31 мая 2021 г. №287 определяет конкретные требования к предметным результатам по предметной области «Математика», в частности, учебный курс «Вероятность и статистика» (на базовом уровне) должен обеспечить:

- умение оперировать понятиями: столбиковые и круговые диаграммы, таблицы, среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах числового набора; умение извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную в таблицах и на диаграммах, отражающую свойства и характеристики реальных процессов и явлений; умение распознавать изменчивые величины в окружающем мире;

- умение оперировать понятиями: случайный опыт (случайный эксперимент), элементарное событие (элементарный исход) случайного опыта, случайное событие, вероятность события; умение находить вероятности случайных событий в опытах с равновероятными элементарными событиями; умение решать задачи методом организованного перебора и с использованием правила умножения; умение оценивать вероятности реальных событий и явлений, понимать роль практически достоверных и маловероятных событий в окружающем мире и в жизни; знакомство с понятием независимых событий; знакомство с законом больших чисел и его ролью в массовых явлениях.

(на углубленном уровне):

– умение свободно оперировать понятиями: столбиковые и круговые диаграммы, таблицы, среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия и стандартное отклонение числового набора, статистические данные, статистическая устойчивость, группировка данных; знакомство со случайной изменчивостью в природе и обществе; умение выбирать способ представления информации, способствующий природе данных и целям исследования; анализировать и сравнивать статистические характеристики числовых наборов, в том числе при решении задач из других учебных предметов;

– умение свободно оперировать понятиями: случайный опыт (случайный эксперимент), элементарное случайное событие (элементарный исход) опыта, случайное событие, частота и вероятность случайного события; условная вероятность, независимые события, дерево случайного эксперимента; умение находить вероятности событий в опытах с равновероятными элементарными событиями; знакомство с ролью маловероятных и практически достоверных событий в природных и социальных явлениях; умение оценивать вероятности событий и явлений в природе и обществе; умение выполнять операции над случайными событиями, находить вероятности событий, в том числе с применением формул и графических схем (диаграмм Эйлера, графов); умение приводить примеры случайных величин и находить их числовые характеристики; знакомство с понятием математического ожидания случайной величины; представление о законе больших чисел и о роли закона больших чисел в природе и в социальных явлениях.

В новом ФГОС основного общего образования наиболее четко определены требования к предметным результатам освоения, в частности конкретизированы умения, которыми должны овладеть обучающиеся к концу обучения.

Изучение и обобщение опыта работы учителей математики общеобразовательных школ показывает, что учащиеся испытывают

трудности при освоении данных разделов, а учителя – при объяснении данного материала. Основной причиной тому, как показали результаты анкетирования, является недостаточная оснащённость учебно-методическими, дидактическими материалами.

Пособие состоит из четырех глав. Первые три: элементы комбинаторики, элементы теории вероятностей и элементы математической статистики. Глава 4 посвящена систематизации заданий единого государственного экзамена по данным темам. Каждый раздел содержит примеры решения задач. В каждом параграфе приводятся задачи с решениями и необходимые методические рекомендации. Это позволяет быстро и эффективно формировать навыки решения задач. В конце каждой темы предложены задачи и упражнения для самостоятельного решения. Эти задачи подобраны так, что они по методам решения перекликаются с задачами, решения которых приведены в тексте.

Все разделы соответствуют структуре и стандартам необходимого содержания школьного курса по данным разделам.

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1. Правила суммы и произведения.

Пример 1. Из города A в город B можно добраться 12 поездами, 3 самолетами, 23 автобусами. Сколькими способами можно добраться из города A в город B ?

Решение. Проезд из A в B на поезде, самолете или автобусе являются событиями, которые не могут выполняться одновременно одним человеком (взаимоисключающими), поэтому общее количество маршрутов можно вычислить суммированием способов передвижения $12+3+23=38$.

Пример 2. Необходимо составить варианты контрольной работы, каждый из которых должен содержать три задачи. Первая задача выбирается из любого параграфа I главы сборника, вторая - из любого параграфа II главы, а третья - из любого параграфа III главы. Сколько видов контрольной работы можно составить, если I и III глава содержат два параграфа, а II глава - три параграфа?

Решение. Нужно найти число способов выбора трех задач из трех соответствующих глав. Первую задачу можно выбрать двумя способами, так как I глава содержит 2 параграфа. Вторую задачу можно выбрать тремя способами, так как II глава содержит 3 параграфа. Третью задачу можно выбрать двумя способами, так как III глава содержит 2 параграфа. Общее число способов выбора трех задач по правилу произведения равно $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$. Таким образом, можно составить 12 различных видов контрольной работы.

Пример 3. Четыре мальчика и четыре девочки садятся на 8 расположенных подряд стульях, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки - на места с нечетными номерами. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Первый мальчик может сесть на любое из четырех четных мест, второй - на любое из оставшихся трех мест, третий - на любое из оставшихся двух мест. Последнему мальчику предоставляется всего одна возможность. Согласно правилу произведения мальчики могут занять четыре места $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами. Столько же возможностей имеют и девочки. Таким образом, согласно правилу произведения, мальчики и девочки могут занять все стулья $24 \cdot 24 = 576$ способами.

Пример 4. Имеется 20 изделий 1-го сорта и 30 изделий 2-го сорта. Необходимо выбрать 2 изделия одного сорта. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Согласно условию задачи следует выбрать 2 изделия одного сорта, неважно какого. Это могут быть либо изделия 1-го сорта, либо изделия 2-го сорта. По правилу произведения два изделия 1-го сорта можно выбрать $20 \cdot 19 = 380$ способами. Аналогично два изделия 2-го сорта можно выбрать $30 \cdot 29 = 870$ способами. Выбор 2 изделий 1-го сорта исключает выбор 2 изделий 2-го сорта. Тогда по правилу суммы общее число способов выбора изделий одного сорта равно $380 + 870 = 1250$.

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. Решить задачи, используя правила суммы и произведения.

1. Сколько существует трехзначных чисел, не содержащих в своей записи цифры 8?

2. На полке стоят десять томов Пушкина, четыре тома Лермонтова и шесть томов Гоголя. Сколькими способами можно выбрать с полки одну книгу?

3. В магазине «Магнит» имеется 20 плиток молочного шоколада с орехами «ALPEN GOLD» и 14 плиток черного пористого шоколада «ВОЗДУШНЫЙ». Сколькими способами можно выбрать одну плитку шоколада?

4. В книжном магазине «Феникс» имеется 5 книг о Гарри Поттере и 3 книги из серии «Властелин колец». Сколькими способами можно выбрать одну книгу?

5. Сколькими способами можно составить команду из одного спортсмена по прыжкам в длину и одного бегуна, которые являются претендентами для участия в соревнованиях по легкой атлетике, если среди претендентов на участие 7 спортсменов по прыжкам в длину и 4 спортсмена по бегу?

6. В конкурсе принимают участие 20 человек. Сколькими способами можно присудить первую, вторую и третью премии?

7. Сколько может быть различных комбинаций выпавших граней при бросании двух игральных костей (игральная кость - это кубик, на гранях которого нанесены числа 1,2,3,4,5,6)?

8. Вдоль дороги стоят 6 светофоров. Сколько может быть различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет 3 состояния: "красный", "желтый", "зеленый"?

9. Монетку бросают десять раз. Сколько различных последовательностей из орлов и решек может при этом получиться?

10. Сколько слов длины n в q -буквенном алфавите, в которых любые две соседние буквы различны?

11. Сколько слов длины n можно составить, если в алфавите q букв? Сколько среди них палиндромов (слов, читающихся одинаково слева направо и справа налево)?

12. На одной из двух параллельных прямых зафиксировано n точек, а на другой m точек. Сколько имеется а) треугольников; б) четырехугольников с вершинами в данных точках?

13. Каким числом способов можно на шахматной доске поместить черного и белого королей так, чтобы они не атаковали друг друга?

14. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу (т.е. чтобы какое-то число очков встретилось на обеих костях)?

15. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры нечетные? Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

16. Из города А в город В ведут пять дорог, а из города В в город С — три дороги. Пусть, кроме того, из города А в город D можно попасть двумя путями, из D в С — четырьмя (рис.1). Сколькими способами можно добраться из А в С?

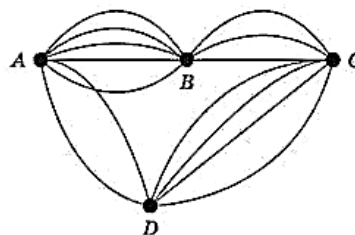


Рис. 1. Варианты перемещения между городами

17. О 4-значном пин-коде карты известно, что первая и последняя цифры у него одинаковые, вторая и третья – разные, и не равны первой цифре. Сколько всего вариантов такого пин-кода?

18. Каких пятизначных чисел больше: тех, что не делятся на 5, или таких, у которых ни первая, ни вторая слева цифры – не пятёрки?

19. Сколько различных четырёхзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4, если каждая цифра может встречаться только один раз? Если каждая цифра может встречаться несколько раз?

20. Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на 5?

2. Факториал.

Пример 1. Вычислить: 1) $\frac{24! \cdot 50!}{25! \cdot 49!}$; 2) $\frac{100! - 100 \cdot 98!}{99! - 98!}$.

Решение.

$$1) \frac{24! \cdot 50!}{25! \cdot 49!} = \frac{24! \cdot 49! \cdot 50}{24! \cdot 25 \cdot 49!} = \frac{50}{25} = 2;$$

$$2) \frac{100! - 100 \cdot 98!}{99! - 98!} = \frac{98!(99 \cdot 100 - 100)}{98!(99 - 1)} = \frac{100(99 - 1)}{99 - 1} = 100.$$

Пример 2. Упростить: 1) $\frac{5!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{(m-1)!4!}$; 2) $\frac{1}{(n+1)!} - \frac{n^2 + 5n}{(n+3)!}$.

Решение.

$$1) \frac{5!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{(m-1)!4!} = \frac{5!}{m(m+1)} \cdot \frac{m(m-1)}{4!} = \frac{5(m-1)}{(m+1)};$$

$$2) \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n^2 + 5n}{(n+3)!} = \frac{(n+2)(n+3) - n^2 - 5n}{(n+3)!} = \frac{n^2 + 5n + 6 - n^2 - 5n}{(n+3)!} = \frac{6}{(n+3)!}.$$

Пример 3. Решить уравнение:

$$1) (n+17)! = 420(m+15)!; \quad 2) (3x)! = 504(3x-3)!.$$

Решение.

$$1) (n+17)! = 420(m+15)!,$$

$$(n+16)(n+17) = 420,$$

$$n^2 + 33n + 272 - 420 = 0,$$

$$n^2 + 33n - 148 = 0,$$

$$D = 1681,$$

$$n = \frac{-33 \pm 41}{2},$$

$$n = 37, \quad n = 4.$$

$$\text{Ответ : } 37, \quad 4.$$

$$2) (3x)! = 504(3x-3)!,$$

$$(3x-2)(3x-1)(3x) = 504,$$

$$27x^3 - 27x^2 + 6x - 504 = 0,$$

$$9x^3 - 9x^2 + 2x - 168 = 0,$$

$$(x-3)(9x^2 + 18x + 56) = 0,$$

$$x = 3 \quad \text{или} \quad 9x^2 + 18x + 56 = 0,$$

$$D = 324 - 2016 < 0.$$

$$\text{Ответ : } 3.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. Вычислить:

$$1) \frac{7! \cdot 4!}{10!} \cdot \left(\frac{8!}{3! \cdot 5!} - \frac{9!}{2! \cdot 7!} \right);$$

$$2) \frac{99! - 98!}{97!};$$

$$3) \frac{89! - 88!}{87!};$$

$$4) \frac{60!}{58!} - \frac{40!}{38!};$$

$$5) \frac{18 \cdot 20! + 3 \cdot 20 \cdot 19!}{21!};$$

$$6) \frac{49!}{47!} + \frac{61!}{59!};$$

$$7) \frac{26! + 25! \cdot 4 + 25! \cdot 8}{25!};$$

$$8) \frac{864! \cdot 4 - 863! \cdot 10 + 863! \cdot 17}{863!};$$

$$9) \frac{848 \cdot 814! - 33 \cdot 814 \cdot 813!}{815!}.$$

Задание 2. Упростить:

- 1) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$; 6) $\frac{(2n)!}{n!}$; 11) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} - 4 \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!} + 9 \cdot \frac{n!}{(n-1)!}$;
- 2) $\frac{n!}{(n+1)! - n!}$; 7) $\frac{(n+3)!}{(n+1)! \cdot (n^2 - 4)}$; 12) $\left(\frac{n}{(n-2)!} - \frac{2}{(n-1)!} \right) \cdot \frac{n-1}{n+1}$;
- 3) $\frac{(n+2) \cdot n!}{(n+1)!}$; 8) $\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}$; 13) $\frac{((n+2)! + n!)(n+1)}{(n+2)! \cdot (n^2 + 3n + 3)}$;
- 4) $\frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$; 9) $\frac{n+2}{n!} - \frac{3n+1}{(n+1)!}$; 14) $\frac{n^2 - 9}{(n+3)!} + \frac{6}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!}$;
- 5) $\frac{1-n}{(n+1)!} + \frac{1}{(n-1)!}$; 10) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} + \frac{(3n+3)!}{(3n+4)!}$; 15) $\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+2)!} - \frac{(n+2)!}{(n+3)!} - \frac{n!}{(n+3)!}$.

Задание 3. Решить уравнение:

- 1) $\frac{(x+6)!}{(x+4)!} + x^2 - 16x = 28$; 2) $\frac{x!}{2! \cdot (x-2)!} = 21 + 0,5x^2$;
- 3) $\frac{(x+1)!}{(x-1)! \cdot 3!} = 12 + \frac{1}{6}x^2$; 4) $\frac{(x+2)!}{x!} = 11 + x^2$;
- 5) $\frac{(x+3)!}{x!} = 28 + x^3 + 6x^2$; 6) $(x!)^2 + 6 = 7x!$;
- 7) $\frac{(2x+1)!}{(2x)!} + \frac{(3x)!}{(3x-1)!} = \frac{(x+1)!}{2x!} + 50$; 8) $(x+1)! = 168x(x-2)!$;
- 9) $(4x+10)! = 54(4x+9)!$; 10) $(x+2)! = (122 + x^2) \cdot x!$.

3. Сочетания, размещения и перестановки без повторений.

Пример 1. Решить комбинаторные задачи:

1) Сколько поединков по борьбе должны быть проведены между 15 спортсменами, если каждый из них должен встретиться с каждым?

2) Преступник знает, что шифр кодового замка состоит из четырех цифр: 2, 4, 5, 9, но не знает порядок их правильного набора. Какое максимальное количество комбинаций он должен перебрать, подбирая код, чтобы открыть замок?

3) Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, если цифры в числе не должны повторяться?

4) Из группы, состоящей из семи мужчин и четырех женщин надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин.

Сколькими способами это можно сделать?

Решение. 1) Определить s – число поединков – значит, найти число наборов по 2 спортсмена, каждый из которых может быть выбран из 15 имеющихся. Следовательно, речь идет о наборах из 15 по 2.

В наборе из двух спортсменов, участвующих в поединке, порядок их размещения не важен, поскольку, переставляя спортсменов местами, получаем поединок с теми же участниками. Значит, рассматриваемые наборы являются сочетаниями.

В наборе из двух человек, участвующих в поединке, не может быть одинаковых элементов, так как невозможно провести поединок с одним спортсменом. Таким образом, речь идет о *сочетаниях без повторений из 15 по 2*. Их число, а значит, и количество возможных поединков, находим по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Итак, $s = C_{15}^2 = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 7 \cdot 15 = 105$.

Ответ: 105 поединков.

2) Порядок следования цифр кода замка является существенным, поскольку, переставив хотя бы две цифры местами, преступник наберет другой код. Все возможные коды состоят из одних и тех же цифр: 2, 4, 5, 9, то есть состав наборов не меняется. Поэтому рассматриваемые наборы являются перестановками.

Кроме того, из условия задачи следует, что код состоит из четырех различных цифр. Следовательно, имеем перестановки без повторений.

Их число, а значит, и количество возможных вариантов кода замка находим по формуле $P_n = n!$. Таким образом, $P_4 = 4! = 24$ – максимальное число комбинаций должен перебрать преступник, подбирая код, чтобы открыть замок.

Ответ: 24 комбинации.

3) Для составления пятизначного числа необходимо выбрать пять цифр из семи имеющихся – 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, причем, по условию задачи, эти пять цифр должны быть различными. Значит, в данной задаче речь идет о комбинациях без повторений из 7 по 5. Поскольку порядок следования цифр в числе существенен, то получаем размещения без повторений из 7 по 5.

Таким образом, искомое число s будет равно $A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2520$.

Ответ: 2520 чисел.

4) Так как в выбранной группе должно быть не менее двух женщин, то такую группу можно сформировать следующим образом:

1 способ	2 женщины, 4-о мужчин
2 способ	3 женщины, 3-е мужчин
3 способ	4 женщины, 2-е мужчин

Посчитаем число способов выбора 2 женщин и 4-х мужчин. Сначала подсчитаем число способов выбора двух женщин. Так как порядок расположения женщин в группе не важен, то речь идет о сочетаниях из 4 по 2. Кроме того, один человек дважды не может быть выбран в группу. Значит, получаем сочетания без повторений из 4 по 2. Их число равно

$s_1 = C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 3 \cdot 2 = 6$. Аналогично, число способов выбора 4 мужчин из 7

равно $s_2 = C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 = 35$. Тогда, по правилу произведения, число

способов выбора двух женщин и четверых мужчин равно

$$s = s_1 \cdot s_2 = 6 \cdot 35 = 210.$$

Аналогично, трех женщин и троих мужчин можно выбрать $l = C_4^3 \cdot C_7^3 = 4 \cdot 35 = 140$ способами, а четырех женщин и двух мужчин –

$m = C_4^4 \cdot C_7^2 = 1 \cdot 21 = 21$ способом.

Следовательно, по правилу суммы, группу из шести человек, в которой не менее двух женщин, можно сформировать $S=s+l+m=210+140+21=371$ способом.

Ответ: 371 способом.

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. *Решить простейшие комбинаторные задачи:*

1. Сколькими способами читатель может выбрать две книги из 60 имеющихся?
2. Сколькими способами можно разложить 8 различных писем по восьми конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?
3. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 5, 6, 7, 9, если каждую цифру можно использовать не более одного раза?
4. Каким числом способов можно рассадить 12 гостей на имеющихся 12 различных стульях?
5. В отделении 10 солдат. Каким числом способов можно составить наряд из двух человек, если один из них должен быть назначен старшим?
6. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если должно быть по одному уроку математики, истории, информатики, философии и психологии?
7. Из 2 математиков и 10 экономистов должна быть составлена комиссия в составе 8 человек. Сколькими способами это можно сделать?
8. Сколькими способами можно составить наряд из 10 солдат, если в военной части числится 100 солдат?
9. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг, если имеется материал 5 различных цветов?
10. Сколько различных четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова «улица», если каждую букву можно использовать не более одного раза?

11. Сколькими способами можно выбрать из букв слова «цветы» 2 согласные буквы?
12. Сколькими способами можно распределить 10 путевок в санаторий между 90 работниками предприятия?
13. Из 12 солдат необходимо отправить четырех в разведку. Сколькими способами можно сделать выбор?
14. Сколько трехзначных чисел можно образовать из нечетных цифр, если каждую цифру можно использовать не более одного раза?
15. Сколько различных слов можно образовать, переставляя буквы слова «пирог»?
16. Сколькими способами можно выбрать 2 цифры из цифр числа 67345?
17. Сколькими способами можно составить программу концерта, если концерт включает 10 номеров?
18. В видеопрокате имеется 80 видеокассет. Сколькими способами можно взять в видеопрокате 4 видеокассеты?
19. Сколько различных трехбуквенных слов можно образовать из букв слова «кот», если каждую букву нельзя использовать более одного раза?
20. Сколькими способами можно распределить золотую, серебряную и бронзовую медали между 10 участниками соревнований?
21. Сколькими способами можно составить список 10 факультетов вуза?
22. Сколько различных танцевальных пар можно составить из 10 юношей и 10 девушек?
23. Сколькими способами можно выбрать 3 гласных буквы из букв слова «теория»?
24. Сколькими способами можно извлечь 3 фишки из полного набора домино?
25. Сколько различных чисел можно образовать, переставляя цифры числа 5643?
26. На предприятии работает 30 сотрудников. В командировку необходимо направить 4 человек. Сколькими способами это можно сделать?

27. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если в каждом номере нет повторяющихся цифр?

28. В классе 24 ученика. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?

29. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

30. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

Задание 2. Решить комбинаторные задачи с использованием правил суммы и произведения:

1. Из студенческой группы, состоящей из 12 девушек и 13 юношей необходимо выбрать 3 человека на дежурство. Сколькими способами можно это сделать, если среди выбранных должна быть хотя бы одна девушка.

2. На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами их можно расположить в списке ораторов, если Б должен выступить сразу после А.

3. Сколько подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ содержат, по крайней мере, одно нечетное число?

4. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой пачке было по два туза?

5. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \dots, 28\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер и каждое число, кратное трем, имело номер, кратный трем?

6. Сколькими способами можно переставить буквы слова «логарифм» так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными буквами?

7. Сколькими способами можно выбрать из 16 лошадей шестерку для запряжки так, чтобы в нее вошли 3 лошади из шестерки $AA'BB'CC'$, но не вошли ни одна из пар AA' , BB' , CC' ?

8. Сколько четырехзначных чисел, составленных из нечетных цифр, содержит цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?

9. На прямой взяты 4 точки, а на параллельной ей прямой еще 5 точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?

10. Для участия в эстафете необходимо выбрать 6 человек из 7 юношей и 6 девушек так, чтобы среди них было не меньше двух девушек. Сколько таких возможностей существует?

4. Комбинаторные соединения.

Пример 1. Вычислить: $\frac{P_{20}}{A_{20}^{15}} - \frac{A_{20}^5}{C_{20}^5}$.

Решение.

$$\frac{P_{20}}{A_{20}^{15}} - \frac{A_{20}^5}{C_{20}^5} = \frac{20!}{(20-15)!} - \frac{\frac{20!}{(20-5)!}}{\frac{20!}{5!(20-5)!}} = \frac{20!}{5!} - \frac{20! \cdot 5! \cdot 15!}{20! \cdot 15!} = 5! - 5! = 0.$$

Пример 2. Проверить равенство: 1) $C_{20}^{12} = \frac{A_{20}^8}{P_8}$; 2) $C_n^6 = \frac{A_n^{n-6}}{P_{n-6}}$.

Решение.

$$1) C_{20}^{12} = \frac{20!}{12!(20-12)!} = \frac{20!}{12! \cdot 8!};$$

$$\frac{A_{20}^8}{P_8} = \frac{20!}{(20-12)! \cdot 8!} = \frac{20!}{12! \cdot 8!}.$$

Таким образом, равенство верно.

$$2) C_n^6 = \frac{n!}{6!(n-6)!};$$

$$\frac{A_n^{n-6}}{P_{n-6}} = \frac{\frac{n!}{(n-(n-6))!}}{(n-6)!} = \frac{n!}{6!(n-6)!}.$$

Таким образом, равенство верно.

Пример 3. Упростить: $(A_{k+n}^{n+2} + A_{k+n}^{n+1}) : A_{k+n}^n$.

Решение.

$$\begin{aligned} (A_{k+n}^{n+2} + A_{k+n}^{n+1}) : A_{k+n}^n &= \left(\frac{(k+n)!}{((k+n)-(n+2))!} + \frac{(k+n)!}{((k+n)-(n+1))!} \right) : \frac{(k+n)!}{((k+n)-n)!} = \\ &= \left(\frac{(k+n)!}{(k-2)!} + \frac{(k+n)!}{(k-1)!} \right) : \frac{(k+n)!}{k!} = \frac{(k+n)! \cdot (k-1) + (k+n)!}{(k-1)!} \cdot \frac{k!}{(k+n)!} = \\ &= \frac{(k+n)! \cdot (k-1+1)}{(k-1)!} \cdot \frac{k!}{(k+n)!} = \frac{(k+n)! \cdot k \cdot k!}{(k-1)! \cdot (k+n)!} = k \cdot k = k^2. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти x и y из пропорции $C_{x+1}^{y+2} : C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^y = 45 : 20 : 6$.

Решение. Так как $C_{x+1}^{y+2} = \frac{(x+1)!}{(y+2)!(x+1-(y+2))!} = \frac{(x+1)!}{(y+2)!(x-y-1)!}$,

$$C_{x+1}^{y+1} = \frac{(x+1)!}{(y+1)!(x+1-(y+1))!} = \frac{(x+1)!}{(y+1)!(x-y)!}, \quad C_{x+1}^y = \frac{(x+1)!}{y!(x+1-y)!}, \quad \text{то, записав}$$

отдельно отношение первого члена пропорции ко второму и второго к третьему, получим:

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)!}{(y+2)!(x-y-1)!} : \frac{(x+1)!}{(y+1)!(x-y)!} &= \frac{(x+1)!}{(y+2)!(x-y-1)!} \cdot \frac{(y+1)!(x-y)!}{(x+1)!} = \frac{x-y}{y+2}, \\ \frac{(x+1)!}{(y+1)!(x-y)!} : \frac{(x+1)!}{y!(x+1-y)!} &= \frac{(x+1)!}{(y+2)!(x-y)!} \cdot \frac{y!(x+1-y)!}{(x+1)!} = \frac{x-y+1}{y+1}. \end{aligned}$$

В силу условия

задачи получаем, $\begin{cases} \frac{x-y}{y+2} = \frac{45}{20}, \\ \frac{x-y+1}{y+1} = \frac{20}{6}; \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{x-y}{y+2} = \frac{9}{4}, \\ \frac{x-y+1}{y+1} = \frac{10}{3}. \end{cases}$ Решив полученную

систему, найдем x и y : $\begin{cases} 4x - 4y = 9y + 18, \\ 3x - 3y + 3 = 10y + 10; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 13y = 18, \\ 3x - 13y = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11, \\ 33 - 13y = 7; \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 11, \\ 13y = 26; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 11, \\ y = 2. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. Вычислить:

$$\begin{array}{lll} 1) C_6^4 + C_5^0; & 2) A_7^3 + A_6^3 + A_5^3; & 3) \frac{A_{12}^6 \cdot 5!}{A_{11}^9}; \\ 4) \frac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{A_{10}^3}; & 5) \frac{C_{21}^4}{(C_{19}^3 + C_{19}^4 + C_{20}^3)}; & 6) \frac{(C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10})}{C_{17}^{10}}. \end{array}$$

Задание 2. Проверить равенство:

$$\begin{array}{ll} 1) C_{13}^9 + C_{13}^{10} = C_{14}^{10}; & 2) C_{14}^6 + C_{14}^7 = C_{15}^7; \\ 3) C_{16}^{12} = \frac{A_{16}^4}{P_4}; & 4) C_{15}^{12} = \frac{A_{15}^3}{P_3}; \\ 5) C_{17}^{10} - C_{17}^9 = \frac{C_{18}^{10}}{2}; & 6) C_{16}^9 - C_{16}^8 = \frac{C_{17}^9}{2}. \end{array}$$

Задание 3. Решить уравнение:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{C_{n+1}^2}{C_n^3} = \frac{4}{5}; & 2) 5C_{2n}^{n-1} = 8C_{2n-1}^n; & 3) C_{n-1}^{n-2} = n^2 - 13; \\ 4) \frac{C_{n+1}^3}{C_n^4} = \frac{6}{5}; & 5) C_n^{n-2} + 2n = 9; & 6) A_{n-1}^2 - C_n^1 = 79; \\ 7) \frac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \frac{24}{23}; & 8) A_{x+1}^{y+1} \cdot P_{x-y} : P_{x-1} = 72; & 9) \frac{P_{x+3}}{A_x^5 \cdot P_{x-5}} = x^2(x+6) + 72. \end{array}$$

Задание 4. Найти x и y из пропорции:

$$\begin{array}{ll} 1) C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^y : C_{x+1}^{y-1} = 5 : 4 : 2; & 2) C_x^{y+1} : C_x^y : C_x^{y-1} = 3 : 3 : 2; \\ 3) C_{x+1}^{y+2} : C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^y = 3 : 4 : 3; & 4) C_{x+1}^{y+1} : C_{x+1}^y : C_{x+1}^{y-1} = 4 : 5 : 4; \\ 5) C_x^{y+1} : C_x^y : C_x^{y-1} = 21 : 14 : 6; & 6) C_x^{y+2} : C_x^{y+1} : C_x^y = 3 : 5 : 5; \\ 7) (A_{x-1}^y + yA_{x-1}^{y-1}) : A_x^{y-1} : C_x^{y-1} = 10 : 2 : 1; & 8) A_x^{y-1} : A_{x-1}^y : (C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-1}) = 21 : 60 : 10. \end{array}$$

Задание 4. Доказать тождество:

$$\begin{array}{ll} 1) P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2}); & 2) C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m; \\ 3) C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k; & 4) A_{n-1}^m = A_n^m - mA_{n-1}^{m-1}; \\ 5) C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k. \end{array}$$

5. Сочетания, размещения и перестановки с повторениями.

Пример 1. Решить комбинаторные задачи:

1) Шестеро курсантов сдавали экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?

2) В кондитерской имеется 4 сорта пирожных. Сколько можно сделать различных покупок 6 пирожных?

3) Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «юриспруденция»?

Решение. 1) Порядок расстановки оценок курсантам является существенным, так как если Иванов получил на экзамене «отлично», а Петров – «удовлетворительно», то, поменяв их местами, оценки курсантов окажутся другими. Далее, состав элементов в наборах может меняться, так как курсант может сдать экзамен на «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно» (по условию никто не сдал экзамен на оценку «неудовлетворительно»). Указанным условиям удовлетворяют размещения.

Так как, по условию, никто из шести курсантов не получил неудовлетворительной отметки, то рассматриваются комбинации из 3 по 6. Кроме того, несколько курсантов могут получить, например, оценку «отлично». Таким образом, в данной задаче речь идет о размещениях с повторениями из 3 по 6.

Их число находим по формуле $\overline{A}_n^k = n^k$. Тогда $\overline{A}_3^6 = 3^6 = 729$.

Ответ: 729 способов.

2) Поскольку можно выбрать все 6 пирожных одного сорта, то выбираемые пирожные образуют комбинацию с повторениями. Кроме того, в рассматриваемых комбинациях не важен порядок элементов. Следовательно, речь идет о сочетаниях с повторениями из 4 сортов по 6. Тогда искомое

число s способов выбора пирожных будет равно

$$s = \overline{C}_4^6 = \frac{(4 + 6 - 1)!}{6! \cdot (4 - 1)!} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{6} = 84.$$

Ответ: 84 способа.

3) В слове «юриспруденция» встречаются элементы 11 типов: «ю», «р», «и», «с», «п», «у», «д», «е», «н», «ц», «я». Поскольку элементы «р» и «и» встречаются по два раза, то данное слово является комбинацией с повторениями, причем в этой комбинации важен порядок следования элементов. Пусть «ю» – элемент 1-го типа, «р» – элемент 2-го типа, «и» – элемент 3-го типа, «с» – элемент 4-го типа, «п» – элемент 5-го типа, «у» – элемент 6-го типа, «д» – элемент 7-го типа, «е» – элемент 8-го типа, «н» – элемент 9-го типа, «ц» – элемент 10-го типа, «я» – элемент 11-го типа. Тогда слово «юриспруденция» представляет собой перестановку с повторениями типа $\{1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$, а искомое число s составленных слов равно числу таких перестановок:

$$\overline{P}_{1,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1} = \frac{(1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)!}{1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{13!}{4} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 1556755200.$$

Ответ: 1556755200.

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. Решить комбинаторные задачи:

1. Сколькими способами можно выбрать 6 пирожных в кондитерской, где есть 4 разных сорта пирожных?
2. Сколько трехзначных чисел можно составить из множества цифр 1,2,3,4,5,6?
3. Студенту необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать?
4. Замок сейфа открывается, если набрана правильная комбинация из четырех цифр от 0 до 9. Кода Вы не знаете. Найти наибольшее число безуспешных попыток.

5. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы слова «математика»?
6. Сколько можно сделать костей домино, используя числа 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9?
7. Сколькими способами можно разместить 12 предметов в трех различных ящиках?
8. Сколькими способами можно 5 шариков разбросать по 8 лункам, если каждая лунка может уместить все 5 шариков?
9. Аккорд – одновременное звучание двух и более нот. Сколько аккордов можно воспроизвести на семи нотах?
10. Два почтальона должны разнести десять писем по десяти адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?
11. Поезд метро делает шестнадцать остановок, на которых выходят все пассажиры. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками сто пассажиров, вошедших в поезд на конечной остановке?
12. Пять учеников следует распределить по трем параллельным классам. Сколькими способами это можно сделать?
13. Четверо юношей и две девушки выбирают спортивную секцию. В секции хоккея и бокса принимают только юношей, в секцию художественной гимнастики – только девушек, а в лыжную и конькобежную секции – и юношей, и девушек. Сколькими способами могут распределиться между секциями эти шесть человек?
14. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, короля и ферзя) на первой линии шахматной доски?
15. Номер паспорта содержит 6 цифр. Сколько таких номеров можно составить?
16. Сколькими способами можно составить новогодний подарок, который должен содержать 100 конфет, если в наличии имеется 15 сортов конфет?

17. Сколькими способами можно переставить буквы слова «хорошо» так, чтобы три буквы «о» не шли подряд?

18. В корзине 12 яблок, 10 груш и 20 слив. Сколькими способами могут разделить между собой эти фрукты двое ребят, так чтобы каждый из них получил не менее четырех фруктов каждого вида?

19. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

20. Как известно, автомобильные номера содержат три буквы (используется 26) и три цифры. Сколько различных номеров существует? В нашем городе автомобильные номера начинаются с «К». Сколько таких номеров можно составить?

6. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля.

Пример 1. Записать разложение по формуле бинома Ньютона и упростить:

$$1) (b + \sqrt{2})^6; \quad 2) (a - 2b)^5.$$

Решение.

$$\begin{aligned} 1) (b + \sqrt{2})^6 &= C_6^6 b^6 (\sqrt{2})^0 + C_6^5 b^5 (\sqrt{2})^1 + C_6^4 b^4 (\sqrt{2})^2 + C_6^3 b^3 (\sqrt{2})^3 + C_6^2 b^2 (\sqrt{2})^4 + \\ &+ C_6^1 b^1 (\sqrt{2})^5 + C_6^0 b^0 (\sqrt{2})^6 = b^6 + 6b^5 \cdot \sqrt{2} + 15b^4 \cdot 2 + 20b^3 \cdot 2\sqrt{2} + 15b^2 \cdot 4 + 6b \cdot 4\sqrt{2} + 8 = \\ &= b^6 + 6\sqrt{2}b^5 + 30b^4 + 40\sqrt{2}b^3 + 60b^2 + 24\sqrt{2}b + 8; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (a - 2b)^5 &= (a + (-2b))^5 = C_5^5 a^5 (-2b)^0 + C_5^4 a^4 (-2b)^1 + C_5^3 a^3 (-2b)^2 + C_5^2 a^2 (-2b)^3 + \\ &+ C_5^1 a^1 (-2b)^4 + C_5^0 a^0 (-2b)^5 = a^5 + 5a^4 \cdot (-2b) + 10a^3 \cdot 4b^2 + 10a^2 \cdot (-8b^3) + 5a \cdot 16b^4 + (-32b^5) = \\ &= a^5 - 10a^4b + 40a^3b^2 - 80a^2b^3 + 80ab^4 - 32b^5. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти 13-й член разложения бинома $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^{15}$.

Решение. Запишем вид общего члена бинома

$$T_{k+1} = C_{15}^k a^{15-k} b^k, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, \dots, 15.$$

Тогда

$$T_{13} = T_{12+1} = C_{15}^{12} \cdot (\sqrt[3]{3})^3 \cdot (\sqrt{2})^{12} = C_{15}^3 \cdot 3 \cdot 2^6 = \frac{15!}{3! \cdot 12!} \cdot 3 \cdot 2^6 = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{6} \cdot 3 \cdot 64 = 8760.$$

Пример 3. Найти номер члена разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^{16}$, не содержащего x .

Решение. Для общего члена бинома имеем,

$$T_{k+1} = C_{16}^k \cdot (\sqrt[3]{x})^{16-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_{16}^k \cdot x^{\frac{16-k}{3}} \cdot x^{-k} = C_{16}^k \cdot x^{\frac{16-4k}{3}}. \quad \text{Член разложения не}$$

зависит от x , если показатель степени x равен 0. Значит,

$$\frac{16-4k}{3} = 0, \quad 16-4k = 0, \quad k = 4. \quad \text{Таким образом, пятый член данного разложения не}$$

зависит от x .

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. Разложить по формуле бинома Ньютона и упростить. Коэффициенты разложения найти с помощью треугольника Паскаля.

$$1) (5 - \sqrt{3})^7; \quad 2) (\sqrt{3} + 2)^6; \quad 3) (x - \sqrt{2})^6; \quad 4) (a - \sqrt{2})^8; \quad 5) (a + \sqrt{5})^7.$$

Задание 2. Найти четвертый член разложения:

$$1) (\sqrt{x} + x)^{12}; \quad 2) (x - \sqrt{x})^{14}; \quad 3) \left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}; \quad 4) \left(\frac{1}{x} + x\right)^{11}; \quad 5) (a^{0,1} + a^{0,2})^9; \quad 6) (b^{0,3} + b^{0,4})^8.$$

Задание 3. Найти номер члена разложения бинома:

$$1) \left(\frac{1}{x^4} + x\right)^{10}, \text{ не содержащий } x; \quad 2) (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x})^{20}, \text{ содержащий } x^7;$$

$$3) (x - \sqrt[4]{x})^{40}, \text{ содержащий } x^{13}; \quad 4) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^6, \text{ содержащий } x^3;$$

$$5) \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}, \text{ содержащий } x^{-1}; \quad 6) \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}, \text{ содержащий } x^3.$$

ГЛАВА 2

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Классификация событий.

Пример 1. Определить вид события, если:

A_1 – вас завтра вызовут к доске;

A_2 – машина, постоянно стоящая в гараже, попадет в аварию на перекрестке городских дорог;

A_3 – на костяшке в домино выпало одно очко;

A_4 – на костяшке в домино выпало в сумме четное число очков;

A_5 – на костяшке в домино выпало в сумме три очка;

A_6 – на костяшке в домино выпало в сумме меньше 13 очков;

A_7 – на костяшке в домино выпало в сумме нечетное число очков;

A_8 – на костяшке в домино выпало в сумме два очка.

Какие из событий $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5; A_6; A_7; A_8$ являются:

1) совместными; 2) несовместными; 3) равновероятными; 4) случайными; 5) неравновероятными; 6) достоверными; 7) элементарными; 8) противоположными; 9) невозможными; 10) составными; 11) образующими полную группу событий?

Решение. Рассмотрим каждое событие и определим его вид:

1) Совместными событиями являются

а) A_6 и любое из событий A_3, A_4, A_5, A_7 и A_8 ;

б) A_3 и A_7 ; в) A_5 и A_7 ; г) A_8 и A_4 .

2) Несовместными являются события:

а) A_3 и любое из событий A_4, A_5, A_8 ;

б) A_4 и любое из событий A_5, A_7 ; в) A_5 и A_8 ; г) A_7 и A_8 .

Важно понимать, что события A_1 и A_2 – разной природы как относительно друг друга, так и относительно остальных событий A_3, A_4, A_5, A_7 и A_8 , поэтому их сравнивать некорректно.

3) Равновозможными являются события A_5 и A_8 , так как для A_5 это костяшки (0; 3) и (1; 2), для A_8 это костяшки (0; 2) и (1; 1), и возможностей и для A_5 и для A_8 всего по две.

4) Все перечисленные события являются случайными.

5) Неравновозможными являются события:

а) A_3 и все остальные A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 ; б) A_4 и все остальные A_5, A_6, A_7, A_8 .

Подробнее остановимся на неравновозможности событий A_4 и A_7 . Действительно, событие A_4 – выбор костяшек, сумма которых четна, т.е. это:

(0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6),
(0; 2), (1; 3), (2; 4), (3; 5), (5; 6),
(0; 4), (1; 5), (2; 6),
(0; 6).

Всего 16 возможностей.

Событие A_7 – выбор костяшек, сумма которых нечетна, т.е. это:

(0; 1), (1; 2), (2; 3), (3; 4), (4; 5), (5; 6),
(0; 3), (1; 4), (2; 5), (3; 6),
(0; 5), (1; 6).

Всего 12 возможностей.

6) Достоверным является только событие A_6 .

7) Элементарными являются события A_1, A_2, A_3 .

8) Противоположными являются события A_4 и A_7 , так как сумма очков или четна, или нечетна.

9) Невозможным является только событие A_2 .

10) Составными являются события A_4, A_5, A_6, A_7 и A_8 .

11) Образуют полную группу событий события:

а) A_4 и A_7 ; б) A_6 состоит из множества всех событий, образующих полную группу событий.

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1.

1. Являются ли несовместными следующие события:

а) опыт – подбрасывание симметричной монеты; события: A – "появление герба", B – "появление цифры";

б) опыт – два выстрела по мишени; события: A – "хотя бы одно попадание"; B – "хотя бы один промах".

2. Являются ли равновозможными следующие события:

а) опыт – подбрасывание симметричной монеты; события: A – "появление герба", B – "появление цифры";

б) опыт – подбрасывание погнутой монеты; события: A – "появление герба", B – "появление цифры";

в) опыт – выстрел по мишени; события: A – "попадание", B – "промах".

3. Образуют ли полную группу событий следующие события:

а) опыт – подбрасывание симметричной монеты; события: A – "герб", B – "цифра";

б) опыт – подбрасывание двух симметричных монет; события: A – "два герба", B – "две цифры".

4. Из колоды, содержащей 36 карт, вытаскивают одну карту. Сколько благоприятных исходов содержит каждое из следующих событий:

1) $A = \{\text{вытянут даму}\}$;

2) $C = \{\text{вытянут даму пик}\}$;

3) $B = \{\text{вытянут пику}\}$;

4) $D = \{\text{вытянут красную масть}\}$?

Какие из этих событий будут элементарными?

5. В каждой из следующих вероятностных ситуаций определите пространство элементарных исходов:

а) из трех урн, содержащих черные и белые шары, вытягивается один;

2) в лаборатории, содержащей 3 установки, одна из которых неисправна, запускают 2 установки;

3) посадку в аэропорте потребовал самолет, который следует из 5 возможных пунктов.

6. Событие A – хотя бы одно из имеющихся четырех изделий бракованное, событие B – бракованных изделий среди них не менее четырех. Что означают противоположные события A и B ?

7. Приведите примеры:

1) трех событий, образующих полную группу событий;

2) трех событий, равновозможных и несовместных, но не образующих полной группы событий;

3) двух событий, несовместных и образующих полную группу, но не равновозможных;

4) двух событий, равновозможных и образующих полную группу, но совместных.

8. Производится 2 выстрела по мишени. Событие A – ни одного попадания в мишень, событие B – одно попадание, событие C – два попадания. Являются ли события A , B , C равновозможными, единственно возможными, попарно несовместными, элементарными? Образуют ли эти события пространство элементарных событий для данного эксперимента? Назовите достоверные события в данном эксперименте. Будут ли события A и C противоположными? Ответы обоснуйте.

9. Постройте в виде таблицы вероятностное пространство следующих экспериментов:

- из трех урн, каждая из которых содержит белые и черные шары, вынимают по одному шару;
- в студенческом отряде 2 первокурсника, 1 второкурсник и 2 студента третьего курса. Выбирают командира отряда и его заместителя;

- к условию из 2) добавлено ограничение – командиром отряда не может быть первокурсник.

10. Команды L и B играют между собой в турнире по баскетболу. Для победы в турнире команде необходимо выиграть три игры из четырех. Построив дерево подсчета, определите пространство элементарных исходов этого эксперимента.

11. Назвать противоположные события для следующих событий:

- A – выпадение двух гербов при бросании двух монет;
- B – появление белого шара при вынимании одного шара из урны, содержащей 1 красный, 2 белых и 3 черных шара;
- C – три попадания при трех выстрелах;
- D – хотя бы одно попадание при пяти выстрелах;
- E – не более двух попаданий при пяти выстрелах;
- F – выигрыш первого игрока при игре в шахматы.

2. Классическое определение вероятности.

Пример 1. Решить задачу, используя классическое определение вероятности.

1) Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Найти вероятность того, что оно простое.

2) Подбрасываются две симметричные монеты. Найти вероятность того, что на обеих выпадет «орел».

3) Из 25 студентов группы 6 человек являются отличниками. По списку наудачу отобраны 10 человек. Какова вероятность того, что среди отобранных студентов 3 отличника?

4) В подъезде дома установили замок с кодом. Дверь автоматически отпирается, если в определенной последовательности набрать три цифры из возможных десяти. Некто вошел в подъезд и, не зная кода, стал наудачу

пробовать различные комбинации из трех цифр. На каждую попытку он тратит 15 секунд. Какова вероятность события $A = \{\text{вошедшему удастся открыть дверь за один час}\}$?

Решение. 1) Испытанием в данном случае является выбор одного из чисел: 1, 2, 3, ..., 10 и, следовательно, $n=10$. Пусть событие $C = \{\text{выбранное число является простым}\}$. Среди возможных вариантов простыми являются числа 2, 3, 5, 7 и, таким образом, $m = 4$. Тогда $P(C) = \frac{4}{10} = 0,4$.

2) Испытанием в данном случае является подбрасывание двух монет. В этом испытании четыре равновозможных исхода $n = 4$: («орел», «орел»), («решка», «орел»), («орел», «решка»), («решка», «решка»). Событию D благоприятствует только одно из них — («орел», «орел») и, следовательно, $m=1$. Тогда $P(D) = \frac{1}{4} = 0,25$.

3) В задаче рассматривается следующее испытание: наудачу отбирается 10 человек из группы. Интересующее нас событие A заключается в том, что 3 из отобранных студентов – отличники. Общее число n возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно отобрать 10 человек из 25, т.е. числу сочетаний из 25 элементов по 10. Таким образом, $n = C_{25}^{10}$. Так как отбор студентов производится наудачу, то все исходы равновозможны, и, кроме того, они попарно несовместны. Подсчитаем число m исходов, благоприятствующих событию A : 3 отличника можно выбрать из 6 имеющихся C_6^3 способами, при этом, остальные 7 студентов из отобранных не должны быть отличниками. Поскольку в группе 19 студентов, не являющихся отличниками, то 7 из них можно выбрать C_{19}^7 способами. Тогда, по правилу произведения, число благоприятствующих исходов испытания для события A равно $m = C_6^3 \cdot C_{19}^7$.

Согласно классическому определению вероятности, $P(A) =$

$$\frac{m}{n} = \frac{C_6^3 \cdot C_{19}^7}{C_{25}^{10}} = \frac{\frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{19!}{7! \cdot 12!}}{\frac{25!}{10! \cdot 15!}} = \frac{78}{253}.$$

3) Так как цифры, входящие в набираемый номер, могут повторяться и порядок их набора играет существенную роль, то мы приходим к схеме размещений с повторениями. Число возможных вариантов набора трех цифр из 10 возможных равно $\overline{A}_{10}^3 = 10^3$. За один час, тратя на набор комбинации 15 секунд, можно набрать 240 различных комбинаций, т.е. $m = 240$. Искомая вероятность $P = \frac{m}{n} = \frac{240}{10^3} = 0,24$.

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. Решить задачу, используя классическое определение вероятности.

1. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

2. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет четное число раз.

3. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет чаще решки.

4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 8. Результат округлите до сотых.

5. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Какая сумма очков выпадает чаще всего? Какова вероятность этого события. Результат округлите до сотых.

6. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что первый раз число выпавших очков будет больше, чем во второй. Результат округлите до сотых.

7. Вася, Петя, Коля и Лёша бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

8. В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 10 из них встречается вопрос по теме "Неравенства". Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос по теме "Неравенства".

9. В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

10. При производстве в среднем на каждые 2982 исправных насоса приходится 18 неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

11. Из множества натуральных чисел от 10 до 19 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

12. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 спортсменов из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

13. В классе 26 учащихся, среди них два друга — Андрей и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

14. За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

15. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет

три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

16. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и последнюю игры.

17. На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

18. Для экзамена подготовили билеты с номерами от 1 до 25. Какова вероятность того, что взятый наугад учеником билет имеет:

1) однозначный номер; 2) двузначный номер?

19. В мешке находятся жетоны с номерами от 1 до 15. Из мешка наугад вынимают один жетон. Какова вероятность того, что номер вынутого жетона не делится ни на 2, ни на 3? Результат округлите до сотых.

20. В доме 93 квартиры, из которых 3 находятся на первом этаже, а 6 – на последнем. Квартиры распределяются по жребию. Какова вероятность того, что жильцу не достанется квартира, расположенная на первом или на последнем этаже? Результат округлите до сотых.

Задание 2. *Решить задачу, используя классическое определение вероятности и формулы комбинаторики:*

1. В коробке 6 одинаковых, занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

2. В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных номерами 1, 2, ..., 10. Наудачу извлечены 6 деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся детали №1 и №2.

3. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

4. Набирая номер телефона, следователь забыл последние три цифры и, помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что он дозвонится до нужного абонента.

5. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу кинескопов окажутся три кинескопа Львовского завода.

6. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

7. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

8. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

9. В «секретном» замке на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на пять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

10. В барабане револьвера семь гнезд, в двух из которых заложены патроны. Барабан раскручивается и нажимается спусковой крючок. Найти вероятность того, что будет произведен выстрел.

11. Какова вероятность того, что номер случайно выбранной автомашины не содержит одинаковых цифр (номер машины содержит три цифры)?

12. В коробке из 20 патронов 7 – от пистолета Макарова. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад патронов три подходят к пистолету Макарова.

13. В игре в «покер» (52 карты) найти вероятность «каре», то есть того, что у игрока из пяти карт будет 4 одинаковых (4 туза, 4 короля, и т.д.).

14. Шеститомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что тома стоят в нужном порядке по возрастанию номеров слева направо.

15. Номер состоит из пяти цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.

16. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы «о», «п», «р», «с», «т», получится слово «спорт»?

17. Наудачу набирается семизначный номер телефона. Найти вероятность того, что это номер 1234567.

18. В коллекции 100 монет, из которых 15 монет семнадцатого века. Найти вероятность того, что наудачу выбранные три монеты датированы семнадцатым веком.

19. На собрании присутствуют 20 женщин и 25 мужчин. По жребию выбирают делегацию из 7 человек. Найти вероятность того, что в составе делегации окажутся только мужчины.

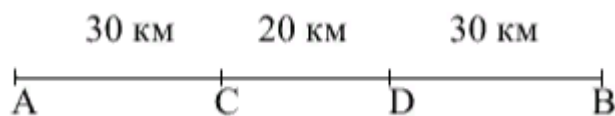
20. Имеется 10 билетов в театр, 6 из которых – на места первого ряда. Найти вероятность того, что из двух наудачу взятых билета оба окажутся на места первого ряда.

3. Геометрическое определение вероятности.

Пример 1. Решить задачу, используя геометрическое определение вероятности.

На прямолинейном участке газопровода длиной 80 км произошел разрыв. Какова вероятность того, что разрыв удален от обоих концов участка на расстояние, большее 30 км?

Решение. Участок газопровода AB разобьем точками C, D на три

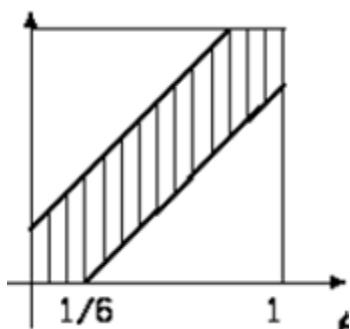


части, как показано на рис. В нашем случае разрыв газопровода должен произойти на участке CD .

Значит, вероятность события равна $p = \frac{CD}{AB} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Пример 2. Пьеро и Буратино условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Они договорились, что тот, кто придет первым, ждет другого в течении 10 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если каждый из друзей может прийти в любое время в течение указанного часа независимо от другого?

Решение. Будем считать интервал с 14 до 15 часов дня отрезком $[0,1]$ длиной 1 час. Пусть x и y — моменты прихода Пьеро и Буратино (они являются точками отрезка $[0,1]$). Все возможные результаты эксперимента — множество точек квадрата со стороной 1: $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Можно



считать, что эксперимент сводится к бросанию точки наудачу в квадрат. При этом благоприятными исходами являются точки множества

$$A = \left\{ (x, y) : |x - y| \leq \frac{1}{6} \right\} \quad (10 \text{ минут} = 1/6 \text{ часа}).$$

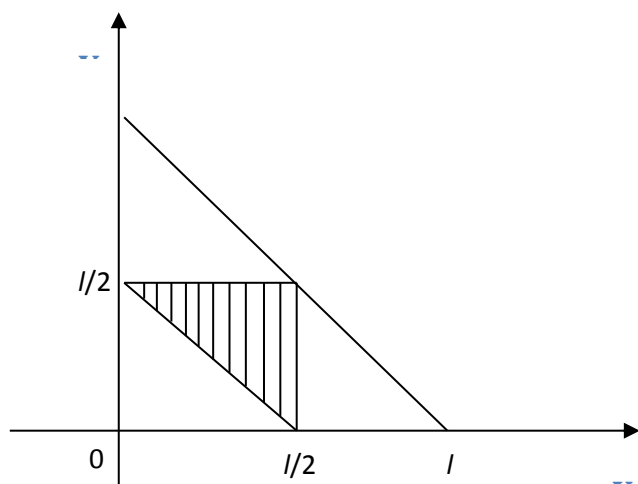
То есть попадание в множество A наудачу брошенной в квадрат точки означает, что Буратино и Пьеро

встретятся. Тогда вероятность встречи равна $P = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}{1} = \frac{11}{36}$.

Пример 3. На отрезке AB , длина которого l , наугад ставятся две точки, в результате чего этот отрезок оказывается разделенным на три части. Найти

вероятность того, что из трех получившихся частей можно составить треугольник.

Решение. Обозначим через x , y и $l - x - y$ части отрезка AB . Тогда $0 \leq x \leq l$; $0 \leq y \leq l$; $x + y \leq l$. На плоскости этой области соответствует треугольник, ограниченный осями координат и прямой $x + y \leq l$.



Треугольник из полученных отрезков можно будет составить, если сумма длин двух из них превзойдет третью сторону, т.е.

$$x + y \geq l - x - y \Leftrightarrow x + y \geq \frac{l}{2} \text{ и } x \leq \frac{l}{2}, y \leq \frac{l}{2}.$$

Благоприятствующая площадь (см. рис. заштрихованный треугольник) равна

$$S_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{8}, \quad S = \frac{1}{2} \cdot l \cdot l = \frac{l^2}{2}. \quad \text{Тогда} \quad \text{искомая} \quad \text{вероятность}$$

$$P = \frac{S_b}{S} = \frac{l^2/8}{l^2/2} = \frac{1}{4}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. Решить задачу, используя геометрическое определение вероятности:

1. В круг вписали равносторонний треугольник. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник?

2. В круг вписали квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в квадрат?

3. В квадрат вписали круг. В квадрат наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в круг?

4. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $BC = 3$ провели биссектрису угла A . В прямоугольник наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник?

5. На отрезок AB случайным образом бросается точка. Какова вероятность, что она более чем в 2 раза будет ближе к точке A чем к B ?

6. В куб вписали шар. В куб случайным образом бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в шар?

7. Точки A и B принадлежат окружности. Дуга AB равна 60 градусам. Какова вероятность попадания на дугу точки, случайным образом брошенной на окружность?

8. В круг вписали равнобедренный прямоугольный треугольник. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник?

9. На грань куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ случайным образом ставится точка. Какова вероятность, что она попадет на грань $ABCD$?

10. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $BC = 5$ провели диагонали, пересекающиеся в точке O . В прямоугольник наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник ABO ?

11. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ провели плоскость ACB_1 . В куб наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в пирамиду $ABCB_1$?

12. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . В ромб, случайным образом, бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник ABO ?

13. В круг вписали квадрат $ABCD$. На окружность случайным образом бросается точка. Какова вероятность, что она попадет на дугу AB ?

14. В правильный шестиугольник $ABCDEF$ наудачу бросается точка. Какова вероятность, что она попадет в треугольник ABC ?

15. На отрезок AB случайным образом бросается точка. Какова вероятность, что она более чем в 3 раза будет ближе к точке B чем к A ?

16. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором одну минуту горит зеленый свет и полминуты красный, затем снова одну минуту — зеленый и полминуты красный и т.д. В случайный момент времени к перекрестку подъезжает автомобиль. Какова вероятность того, что он проедет перекресток без остановки?

17. К автобусной остановке через каждые четыре минуты подходит автобус линии A и через каждые шесть минут — автобус линии B . Интервал времени между моментами прихода автобуса линии A и ближайшего следующего автобуса линии B равновозможен в пределах от нуля до четырех минут. Определить вероятность того, что: а) первый пришедший автобус окажется автобусом линии A ; б) автобус какой-либо линии подойдет в течение двух минут.

18. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождение причала, если время стоянки первого парохода три часа, а второго — четыре часа.

19. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 мин, после чего уходит. Наблюдаемый результат — пара чисел (x, y) , где x — время прихода Петра, y — время прихода Ивана. Определить вероятности следующих событий: A = «встреча состоялась», B = «Петр ждал Ивана все обусловленное время и не дождался», C = «Ивану не пришлось ждать Петра», D = «встреча состоялась после 11 ч 30 мин», E = «Иван опоздал на встречу», F = «встреча состоялась, когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут».

20. На окружности единичного радиуса наудачу ставятся три точки A , B и C . Какова вероятность того, что треугольник ABC остроугольный?

4. Статистическое определение вероятности.

Пример 1. На отрезке натурального ряда от 1 до 20 найти частоту простых чисел.

Решение. На указанном отрезке натурального ряда чисел находятся следующие простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Всего их 8. Так как $n = 20$, то $m = 8$, то искомая частота $w = \frac{8}{20} = 0,4$.

Пример 2. Статистическая вероятность попадания в цель при 75 выстрелах равна 0,6. Сколько было попаданий?

Решение. Так как $w(A) = \frac{N_A}{N}$, где N — число выстрелов, а N_A — число попаданий, то $N_A = w(A) \cdot N$. Подставляя исходные данные, получим $N_A = 0,6 \cdot 75 = 45$.

Пример 3. Для пошива школьных форм было заказано 2200 пуговиц. При проверке партии из 500 пуговиц было обнаружено 6 бракованных. Какое наименьшее количество запасных пуговиц необходимо еще заказать, чтобы исключить брак?

Решение. Статистическая частота брака будет составлять $w = \frac{6}{500}$. Тогда среди 2200 пуговиц число бракованных $2200 \cdot \frac{6}{500} = 26,4$. Округлив это число до наибольшего ближайшего целого, получим 27 пуговиц. Значит, чтобы исключить брак, необходимо дозаказать не менее 27 пуговиц.

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. Решить задачу, используя статистическое определение вероятности:

1. Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую

поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

2. Для выяснения качества семян было отобрано и высеяно в лабораторных условиях 1000 штук. 980 семян дали нормальный всход. Найдите частоту нормального всхода семян.

3. В некотором городе из 4000 появившихся на свет младенцев 1940 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе. Результат округлите до тысячных.

4. Французский естествоиспытатель Бюффон (XVIII) бросил монету 4040 раз, и при этом герб выпал в 2048 случаях. Найдите частоту выпадения герба в данной серии испытаний. Результат округлите до десятитысячных.

5. Вероятность того, что новый пылесос в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,093. В некотором городе из 1000 проданных пылесосов в течение года в гарантийную мастерскую поступило 97 штук. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

6. При стрельбе по мишени частота попаданий равна 0,75. Найти число попаданий при 40 выстрелах.

7. Частота нормального всхода семян равна 0,97. Из высеянных семян взошло 970. Сколько семян было высеяно?

8. На отрезке натурального ряда от 1 до 20 найти частоту простых чисел.

9. Для пошива школьных форм было заказано 2200 пуговиц. При проверке партии из 500 пуговиц было обнаружено 6 бракованных. Какое наименьшее количество запасных пуговиц необходимо еще заказать, чтобы исключить брак?

10. При стрельбе была получена относительная частота попадания 0,6. Сколько было сделано выстрелов, если получено 12 промахов?

5. Операции над событиями.

Пример 1. Два шахматиста играют подряд две партии. Под исходом опыта будем понимать выигрыш одного из них в i -й партии или ничью. Построить пространство Ω элементарных исходов.

Решение. Обозначим события A_i — в i -й партии выиграл первый игрок, B_i — второй, C — ничья. Тогда возможные исходы игры:

1. Обе партии выиграл первый игрок A_1A_2 .
2. Обе партии выиграл второй игрок B_1B_2 .
3. Обе партии закончились вничью C_1C_2 .
4. В первой партии выиграл первый игрок, во второй — второй A_1B_2 .
5. В первой выиграл первый игрок, во второй — ничья A_1C_2 .
6. В первой партии победа второго игрока, во второй — первого B_1A_2 .
7. В первой — победа второго игрока, во второй — ничья B_1C_2 .
8. В первой — ничья, во второй — победа первого игрока C_1A_2 .
9. В первой — ничья, во второй — победа второго игрока C_1B_2 .

Пример 2. Пусть A , B , C — три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A , B , C :

1. Произошло только A .
2. Произошло A и B , но C не произошло.
3. Все три события произошли.
4. Произошло, по крайней мере, одно из событий.
5. Произошли, по крайней мере, два события.
6. Произошло одно и только одно событие.

7. Произошли два и только два события.

8. Ни одно событие не произошло.

9. Произошло не более двух событий.

Решение. 1. Обозначим $\bar{B}$ и $\bar{C}$, что события B и C не произошли, тогда событие: произошло только A можно записать в виде $A\bar{B}\bar{C}$.

2. $AB\bar{C}$.

3. ABC .

4. Событие произошло, по крайней мере, одно из событий можно представить как сумму этих событий: $A + B + C$.

5. Произошли, по крайней мере, два события — это сумма $AB + AC + BC$.

6. Произошло одно и только одно событие — это сумма событий $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$.

7. Произошли два и только два события — можно записать в виде $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C$, или $AB + AC + BC - ABC$.

8. $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

9. $\overline{ABC}$, т.е. три события одновременно не произошли.

Пример 3. События A , B и C означают, что взято хотя бы по одной книге из трех различных собраний сочинений, каждое из которых содержит по крайней мере три тома. События A_s и B_k означают соответственно, что из первого собрания сочинений взяты s , а из второго k томов. Что означают события: а) $A + B + C$; б) ABC ; в) $A_1 + B_3$; г) A_2B_2 ; д) $(A_1B_3 + B_1A_3)C$?

Решение. 1. $A + B + C$ — взята хотя бы одна книга.

2. ABC — взято хотя бы по одному тому из первого, второго и третьего собрания сочинений.

3. $A_1 + B_3$ — взята одна книга из первого собрания сочинений или три книги из второго собрания сочинений, или одна из первого и три из второго собрания сочинений одновременно.

4. $A_2 B_2$ — взято по два тома из первого и второго собрания сочинений.

5. $(A_1 B_3 + B_1 A_3)C$ — взят хотя бы один том из третьего собрания сочинений и один том из первого и три тома из второго собрания сочинений или три тома из первого и один том из второго собрания сочинений.

Пример 4. Пусть $A_i (i = \overline{1,3})$ — события: Ваша встреча с i -ым другом. Составьте события: а) с друзьями Вы не встречались; б) Вы встречались только со вторым другом; в) с кем-то Вы не встретились; г) Вы встретились с большей частью друзей; д) у Вас состоялась встреча только с одним другом; е) Вы встретились с кем-то из первых двух друзей, а с третьим другом — нет; ж) со вторым другом Вы не встретились.

Назовите события: а) $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$;
 б) $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$; в) $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$; г) $A_1 \cdot (\overline{A_2} + \overline{A_3})$;
 д) $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$; е) $\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$; ж) $A_1 \cdot \overline{A_2}$.

Решение. Составим события:

а) Так как событие $A_i (i = \overline{1,3})$ — «Ваша встреча с i -ым другом», то $\overline{A_i} (i = \overline{1,3})$ — «с i -ым другом Вы не встретились». Поэтому событие «с друзьями Вы не встречались» — это совместное наступление событий $\overline{A_i}$, т.е. $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$.

б) Слово *только* говорит о том, что с первым и вторым другом Вы не встречались, а со вторым — да. Это $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$.

в) Этот кто-то может быть любым из ваших друзей, поэтому событие — сумма событий $\overline{A_i} (i = \overline{1,3})$, т.е. $\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$.

г) Так как друзей трое, а большая часть – это более половины, то Вы встретились, по крайней мере, с двумя друзьями, поэтому событие – сумма событий $A_i \cdot A_j$ ($i, j = \overline{1,3}$) и $i \neq j$, т.е. $A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_3 + A_2 \cdot A_3$.

д) Этим одним другом может быть любой из Ваших трех друзей, поэтому это событие есть сумма таких событий: «Вы встретились только с первым другом» или «встретились только со вторым», или «встретились только с третьим», т.е. $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$.

е) Встреча с кем-то из первых двух друзей – это встреча либо с первым другом, либо со вторым (а может быть и с обоими), т.е. это сумма $A_1 + A_2$ и в то же время не встретились с третьим. Поэтому ответ: $(A_1 + A_2) \cdot \overline{A_3}$.

ж) Так как A_2 – «встреча со вторым другом», то $\overline{A_2}$ – «встречи со вторым другом не было». Так как про других друзей ничего не говорится, то не надо думать про встречи с ними.

Назовем события:

а) Вы не встретились только с одним другом (или Вы встретились только с двумя).

б) Событие $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ – «ни с кем Вы не встретились», а событие $\overline{\overline{\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3}} = \overline{\overline{\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3}}$ – противоположное событию $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ (отрицание этого события). Поэтому ответ: встречи были $(A_1 + A_2 + A_3)$ (с кем-то Вы встретились). Итак, $\overline{\overline{\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3}} = A_1 + A_2 + A_3$.

в) С двумя друзьями Вы не встречались (с большей частью своих друзей Вы не встречались).

г) С первым другом Вы встретились, а с кем-то из остальных – нет.

д) Вы не встретились только со вторым другом (или у Вас была встреча только с первым и третьим другом).

е) Так как $A_1 + A_2 + A_3$ событие «Вы с кем-то встречались», то событие $\overline{A_1 + A_2 + A_3}$ — ему противоположное (отрицание этого события — «Вы ни с кем не встречались», т.е. $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$). Итак, $\overline{A_1 + A_2 + A_3} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1.

1. Рабочий обслуживает три автоматических станка. Событие A — первый станок потребует внимания рабочего в течение часа, B — второй станок потребует внимания рабочего в течение часа, C — третий станок потребует внимания рабочего в течение часа. Что означают события: а) ABC ; б) $A + B + C$; в) $\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$; г) $A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$; д) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

2. Производится испытание трех приборов на надежность. Пусть событие A_k — k -й прибор выдержал испытание ($k = 1, 2, 3$). Представить в виде суммы и произведения события A_k и $\overline{A_k}$ следующие события: а) хотя бы один прибор выдержал испытание; б) не менее двух приборов выдержали испытание; в) только один прибор выдержал испытание; г) только два прибора выдержали испытание.

3. Страховой агент предлагает услугу по страхованию жизни трем потенциальным клиентам. Пусть события A , B и C означают соответственно, что первый, второй и третий клиент согласился застраховать свою жизнь.

1) Составить события:

- а) все клиенты согласились на страховку;
- б) хотя бы один клиент согласился на страховку;
- в) только один клиент согласился на страховку;
- г) только первый клиент согласился на страховку.

2) Назвать события:

- а) $A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$; б) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; в) $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$; г) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

4. Если событие A – выигрыш по билету одной лотереи, B – выигрыш по билету другой лотереи, то что означают события:
 $C = A\bar{B} + \bar{A}B$, $D = A\bar{B} + \bar{A}B + AB$?

5. Три студента независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Пусть событие $A_1 = \{\text{первый студент решил задачу}\}$, $A_2 = \{\text{второй студент решил задачу}\}$, $A_3 = \{\text{третий студент решил задачу}\}$. Выразить через A_i ($i = 1, 2, 3$) следующие события: $A = \{\text{задачу решил хотя бы один студент}\}$; $B = \{\text{задачу решил только первый студент}\}$; $C = \{\text{задачу решил только один студент}\}$.

6. В урне 5 синих, 3 красных и 2 желтых шара, пронумерованных от 1 до 10. Из нее наудачу достали 1 шар. Событие A – достали синий шар, событие B – достали красный шар, событие C – достали желтый шар, событие D – достали шар с четным номером, событие E – достали шар с номером, кратным 3. Что означает событие $(A + B) \cdot \bar{D} \cdot E$?

7. Пусть события: A – цветет астра, K – цветет кактус, C – цветет сирень. Составьте события: а) только цветет кактус; б) не цветут два вида цветов; в) только два вида цветов цветут; г) цветут сирень с кактусом; д) только один вид цветет; е) что-то цветет; ж) астра не цветет.

Назовите события: а) $\bar{A} \cdot \bar{K} \cdot \bar{C}$; б) $\overline{C \cdot A \cdot K}$; в) $(A + C) \cdot \bar{K}$; г) $\bar{A} \cdot \bar{K} + \bar{A} \cdot \bar{C} + \bar{K} \cdot \bar{C}$; д) $\overline{A + K + C}$; е) $\bar{A} \cdot K \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{K} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{K} \cdot C$; ж) $\bar{A} \cdot \bar{K}$.

8. Пусть D_i ($i = 1, 3$) – события: i -ый депутат выступил с речью. Составьте события: а) только двое депутатов выступили с речью; б) все промолчали; в) только третий депутат высказался; г) кто-то из первых двух депутатов выступил с речью, а третий промолчал; д) большая часть депутатов промолчала; е) не все промолчали.

Назовите события: а) $\overline{D_1 + D_2 + D_3}$; б) $(\bar{D}_1 + \bar{D}_2) \cdot D_3$; в) $\bar{D}_1 \cdot D_3$; г) $D_1 + D_2 + D_3$; д) $\bar{D}_1 \cdot \bar{D}_2 \cdot D_3 + \bar{D}_1 \cdot D_2 \cdot \bar{D}_3 + D_1 \cdot \bar{D}_2 \cdot \bar{D}_3$; е) $\overline{D_1 \cdot D_2 \cdot D_3}$; ж) $\bar{D}_1 \cdot D_2 \cdot D_3$.

9. Пусть T_i ($i = 1, 3$) – события: i -ое такси стоит на стоянке. Составьте события: а) можно уехать на такси; б) только одна машина стоит на стоянке; в) двух такси нет на стоянке; г) только два такси стоят на стоянке; д) только второго такси нет на стоянке; е) какого-то такси нет на стоянке; ж) стоянка пуста.

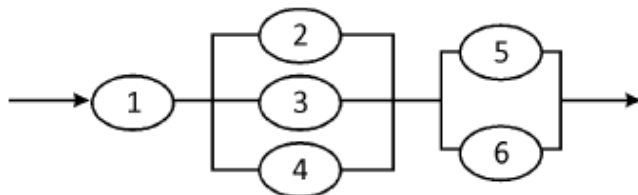
Назовите события: а) $T_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3 + T_2 \cdot T_3$; б) $\overline{T_1} \cdot \overline{T_2} \cdot \overline{T_3}$; в) T_2 ;

г) $\overline{T_1} \cdot T_2 \cdot T_3$; д) $T_1 \cdot (\overline{T_2} + \overline{T_3})$; е) $T_1 + T_2 + T_3$;

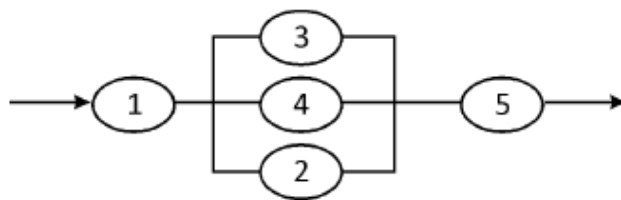
ж) $\overline{T_1} \cdot T_2 \cdot T_3 + T_1 \cdot \overline{T_2} \cdot T_3 + T_1 \cdot T_2 \cdot \overline{T_3}$.

Задание 2. Электрическая цепь состоит из элементов, соединенных по схеме. Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером i ($i=1,2,3,\dots$), а событие B – безотказную работу цепи. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i .

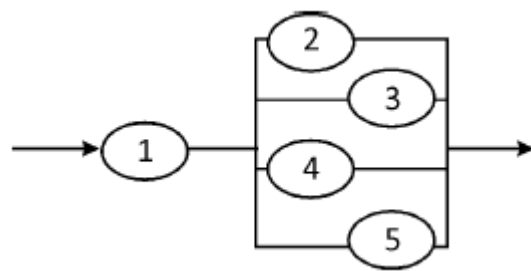
1.



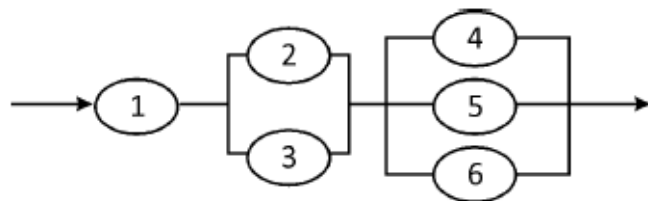
2.



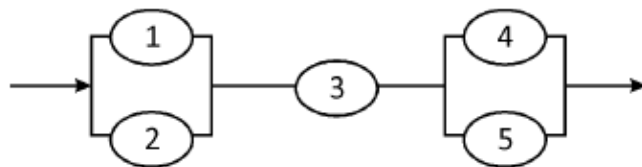
3.



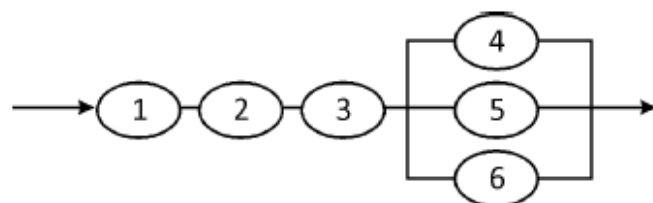
4.



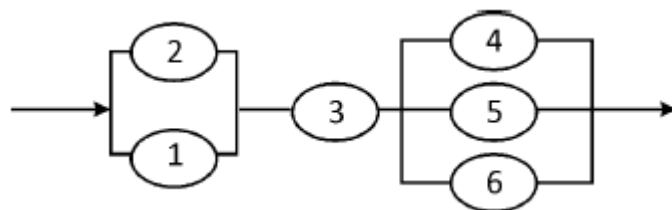
5.



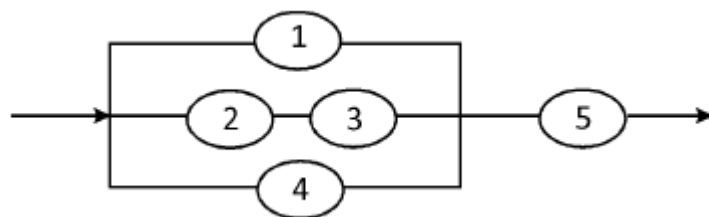
6.



7.



8.



6. Сумма и произведение событий.

Пример 1. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по телевидению, равна 0,06. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же продукта на рекламном стенде, равна 0,08. Предполагая, что оба события независимы, определить вероятность того, что потребитель увидит: а) обе рекламы; б) хотя бы одну рекламу.

Решение. Пусть A = «потребитель увидит рекламу по телевидению»; B = «потребитель увидит рекламу на стенде»; C = «потребитель увидит хотя бы одну рекламу». По условию $P(A) = 0,06$; $P(B) = 0,08$. События A и B совместные и независимые.

а) Потребитель увидит две рекламы. В наших обозначениях это событие AB , так как эти события независимы, то $P(AB) = P(A)P(B) = 0,06 \cdot 0,08 = 0,0048$.

б) Событие C есть сумма событий A и B . Так как эти события совместны, то $P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

$$P(C) = 0,06 + 0,08 - 0,0048 = 0,1352.$$

Эту же вероятность можно найти, используя свойство вероятностей противоположных событий

$$P(C) = P(A + B) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B});$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,06 = 0,94; \quad P(\overline{B}) = 1 - 0,08 = 0,92;$$

$$P(C) = 1 - 0,94 \cdot 0,92 = 1 - 0,8648 = 0,1352.$$

Пример 2. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

Решение. Обозначим события: A_1 — студент ответит на первый вопрос, A_2 — на второй, A_3 — на третий. То, что студент ответит на все три вопроса — это произведение событий $A_1 A_2 A_3$. По теореме умножения вероятностей

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 A_2}(A_3).$$

Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос $P(A_1) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$, так как всех возможных вопросов 25, а студент знает 20. После того как студент ответит на первый вопрос останется 24 возможных вопроса, а из них тех, которые знает студент, 19, следовательно, $P_{A_1}(A_2) = \frac{19}{24}$. Аналогично

рассуждая, получим, что $P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{18}{23}$. Искомая вероятность

$$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{4}{5} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{19 \cdot 3}{5 \cdot 23} = \frac{57}{115} \approx 0,496.$$

Пример 3. В большой рекламной фирме 21 % работников получают высокую заработную плату. Известно также, что 40 % работников фирмы — женщины, а 6,4 % работников — женщины, получающие высокую заработную плату. Можно ли утверждать, что на фирме существует дискриминация женщин в оплате труда?

Решение. Для решения задачи необходимо ответить на вопрос: «Чему равняется вероятность того, что случайно выбранный работник будет женщиной, имеющей высокую заработную плату?» и сравнить ее с вероятностью того, что наудачу выбранный работник любого пола имеет высокую зарплату.

Пусть A — случайно выбранный работник имеет высокую зарплату; B — случайно выбранный работник — женщина. События A и B — зависимые. По условию $P(AB) = 0,064$; $P(B) = 0,40$; $P(A) = 0,21$. Необходимо найти условную вероятность $P_B(A)$. Из равенства $P(AB) = P(B)P_B(A)$ получим

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,064}{0,40} = 0,16.$$

Поскольку $P_B(A) = 0,16$ меньше, чем $P(A) = 0,21$, то можно заключить, что женщины, работающие в рекламной фирме, имеют меньше шансов получить высокую заработную плату по сравнению с мужчинами.

Пример 4. Вероятность хотя бы одного правильного ответа при опросе преподавателем четырех студентов равна 0,9984. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент правильно ответит на заданный вопрос.

Решение. Вероятность хотя бы одного правильного ответа при опросе четырех студентов определяется по формуле $P = 1 - (1 - p)^4$, где p — вероятность правильного ответа для одного наудачу выбранного студента. По условию $P = 0,9984$. Решаем уравнение

$$\begin{aligned} 1 - (1 - p)^4 &= 0,9984 \Rightarrow (1 - p)^4 = 1 - 0,9984 \Rightarrow (1 - p)^4 = 0,0016 \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 - p)^2 &= 0,04 \Rightarrow 1 - p = 0,2 \Rightarrow p = 0,8. \end{aligned}$$

Пример 5. В театральной кассе к некоторому моменту времени осталось: 1 билет в театр эстрады, 2 билета в драматический театр и 3 билета в театр комедии. Каждый очередной покупатель покупает лишь один билет с равной вероятностью в любой из возможных театров. Два человека из очереди последовательно приобрели билеты. Найти вероятности следующих событий:

- 1) A = «куплены билеты в разные театры»; 2) B = «куплены билеты в какой-нибудь один театр»; 3) C = «все билеты в театр эстрады распроданы»;
- 4) D = «билет в театр комедии куплен раньше, чем в театр эстрады».

Решение. 1) Обозначим A_1 — билет куплен в театр эстрады, A_2 — в драматический театр, A_3 — в театр комедии. Нас интересует вероятность события

$$A = A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 + A_2A_1 + A_3A_2 + A_3A_1.$$

Для первого покупателя

вероятность купить билет в театр эстрады $P(A_1) = \frac{1}{6}$ (так как всех билетов 6, а

в театр эстрады только один). После того как первый покупатель приобрел билет в театр эстрады, в кассе осталось 5 билетов и для второго покупателя условные вероятности $P_{A_1}(A_2)$ и $P_{A_1}(A_3)$ будут равны $P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{5}$, $P_{A_1}(A_3) = \frac{3}{5}$.

Следовательно, по теореме умножения

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{15}; \quad P(A_1 A_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{10}.$$

Если первый покупатель купил билет в драматический театр, то $P(A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, а условные вероятности $P_{A_2}(A_1) = \frac{1}{5}$, $P_{A_2}(A_3) = \frac{3}{5}$ и

$$P(A_2 A_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}, \quad P(A_2 A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}.$$

Наконец, если первый покупатель приобрел билет в театр комедии, то

$$P(A_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P_{A_3}(A_1) = \frac{1}{5}, \quad P_{A_3}(A_2) = \frac{2}{5} \quad \text{и} \quad P(A_3 A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10},$$

$$P(A_3 A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}, \quad P(A) = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = 2 \left(\frac{2+3+6}{30} \right) = \frac{11}{15} \approx 0,733.$$

$$2) \quad B = A_2 A_2 + A_3 A_3,$$

$$P(B) = P(A_2)P_{A_2}(A_2) + P_{A_3}(A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0,267.$$

$$3) \quad P(C) = P(A_1 A_2) + P(A_1 A_3) + P(A_2 A_1) + P(A_3 A_1) = 2 \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10} \right) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

$$4) \quad P(D) = P(A_3 A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. Решить задачи.

1. В течение года фирмы A , B , C , независимо друг от друга, могут обанкротиться с вероятностями 0,06; 0,09 и 0,05 соответственно. Найти вероятности того, что к концу года: 1) все три фирмы будут

функционировать; 2) все три фирмы обанкротятся; 3) только одна фирма обанкротится; 4) только две фирмы обанкротятся; 5) хотя бы одна фирма обанкротится.

2. Пусть вероятность того, что в секции магазина по продаже мужской обуви очередной будет продана пара обуви 44-го размера, равна 0,12, 45-го — 0,04, 46-го или большего — 0,01. Найти вероятность того, что очередной будет продана пара мужской обуви не менее 44-го размера.

3. Студент выучил к зачету 15 вопросов из 20. Ему по одному предлагают три вопроса. Найти вероятность того, что только на третий из них он не дает ответа.

4. Для рабочего из маршрутов трамвая № 1, 2, 4, 7 попутными являются маршруты № 1 и 4. Вычислить вероятность того, что к остановке первым подойдет трамвай маршрута попутного для него номера, если по линиям маршрутов № 1, 2, 4, 7 курсируют соответственно 12, 4, 10, 14 поездов.

5. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только один сигнализатор; б) хотя бы один сигнализатор.

6. Для компании, занимающейся строительством терминалов для аэропортов, вероятность получить контракт в стране A равна 0,4, вероятность выиграть его в стране B равна 0,3. Вероятность того, что контракты будут заключены и в стране A , и в стране B , равна 0,12. Какова вероятность того, что компания получит контракт: а) хотя бы в одной стране; б) только в одной стране?

7. Обследовалась группа из 10 000 человек в возрасте свыше 60 лет. Оказалось, что 4 000 из них постоянно курит. У 1 800 человек из курящих обнаружили серьезные изменения в легких. Среди некурящих серьезные изменения в легких имели 1 500 человек. Являются ли курение и наличие серьезных изменений в легких независимыми событиями? (Ответ дать,

проверив выполнение равенства $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, где событие A – человек курит, событие B – человек имеет серьезные изменения в легких.

8. Вероятности успешной сдачи сессии у студентов Иванова и Петрова равны соответственно 0,95 и 0,9. Найти вероятности следующих событий:

- а) оба студент успешно сдадут сессию;
- б) Иванов сдаст сессию успешно, а Петров не сдаст;
- в) только один из студентов сдаст сессию успешно.

Предполагается, что Иванов и Петров независимо друг от друга готовятся к сессии.

9. Покупатель может приобрести акции двух компаний A и B . Надежность первой компании оценивается экспертами на уровне 90 %, а второй — 80 %. Чему равна вероятность того, что: а) обе компании в течение года не станут банкротами; б) только одна компания станет банкротом; в) наступит хотя бы одно банкротство?

10. В автопробеге участвуют 3 автомобиля. Первый может сойти с маршрута с вероятностью 0,15, второй – с вероятностью 0,05, а третий – с вероятностью 0,1. Определить вероятность того, что к финишу придут: а) только один автомобиль; б) два автомобиля; в) по крайней мере два автомобиля.

11. О двух акциях A и B известно, что они выпущены одной и той же отраслью. Вероятность того, что акция A поднимется завтра в цене, равна 0,2. Вероятность того, что обе акции A и B поднимутся завтра в цене, равна 0,12. Предположим, что вы знаете, что акция A поднимется в цене завтра. Чему равна вероятность того, что и акция B завтра поднимется в цене?

12. Из коробки, в которой 8 красных и 12 черных карандашей, трижды наугад извлекают по одному карандашу (без возвращения). Найти вероятность того, что все три раза будут извлечены черные карандаши.

13. По данным переписи населения (1891 г.) Англии и Уэльса установлено: темноглазые отцы и темноглазые сыновья (AB) составляют 5 %

обследованных лиц, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья ($\overline{AB}$) — 7,9 %, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья ($\overline{AB}$) — 8,9 %, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья ($\overline{AB}$) — 78,2 %. Найти связь между цветом глаз отца и сына.

14. Статистика, собранная среди студентов одного из вузов, обнаружила следующие факты: 60 % всех студентов занимаются спортом, 40 % участвуют в научной работе на кафедрах и 20 % занимаются спортом и участвуют в научной работе на кафедрах. Корреспондент местной газеты подошел к наудачу выбранному студенту. Найти вероятности следующих событий:

1) A = «студент занимается по крайней мере одним из двух указанных видов деятельности»,

2) B = «студент занимается только спортом»,

3) C = «студент занимается только одним видом деятельности».

15. В фирме 550 работников, 380 из них имеют высшее образование, а 412 — среднее специальное образование, у 357 высшее и среднее специальное образование. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет: а) хотя бы одно из этих образований; б) только одно из этих образований; в) работник имеет только среднее специальное образование.

16. За некоторый промежуток времени амеба может погибнуть с вероятностью $1/4$, выжить с вероятностью $1/4$ и разделиться на две с вероятностью $1/2$. В следующий такой же промежуток времени с каждой амебой независимо от «происхождения» происходит то же самое. Сколько амеб и с какими вероятностями могут существовать к концу второго промежутка времени?

17. Радист посылает вызов корреспонденту до тех пор, пока тот его не услышит, но при этом может послать не более трех вызовов. Вероятность того, что корреспондент примет первый вызов, равна 0,2, второй — 0,3,

третий — 0,4. По условиям приема события, состоящие в том, что i -й по счету вызов ($i = 1, 2, 3$) услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент вообще услышит радиста.

18. Игрок A поочередно играет с игроками B и C по две партии. Игра начинается с игрока B . Вероятности выигрыша первой партии для B и C равна 0,1 и 0,2 соответственно; вероятность выигрыша во второй партии для B равна 0,3, для C равна 0,4. Определить вероятность того, что: а) первым выиграет B ; б) первым выиграет C .

19. Вероятность попадания стрелка в цель равна 0,8. Если стрелок попадает в цель при первом выстреле, то ему предоставляется право стрелять во вторую цель. Вероятность поражения обеих целей этим стрелком равна 0,6. Найти вероятность поражения стрелком второй цели.

20. В двух коробках лежат карандаши одинаковой величины и формы, но разного цвета. В первой коробке 4 красных и 6 черных, а во второй 3 красных, 5 синих и 2 черных карандаша. Из обеих коробок вынимается наугад по одному карандашу. Найти вероятность того, что оба карандаша окажутся красными.

21. В коробке 6 красных и 7 синих фломастеров. Из коробки наугад последовательно, один за другим, вынимают два фломастера, без возвращения в коробку. Найти вероятность того, что хотя бы один из вынутых фломастеров – красный.

22. Вероятность поражения цели одной ракетой равна 0,7, а другой – 0,8. Найти вероятность того, что хотя бы одна из ракет поразит цель, если они выпущены независимо друг от друга.

23. Экзаменационные работы по математике, которые писали абитуриенты при поступлении в институт, зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Найти вероятность того, что номер наугад взятой работы кратен 10 или 11.

24. Контрольная работа состоит из трех задач и по алгебре и трех задач по геометрии. Вероятность правильно решить задачу по алгебре равна 0,8, а

по геометрии – $0,6$. Найти вероятность того, что правильно решены все шесть задач.

25. В первой урне 4 белых и 6 черных шаров, во второй – 5 белых и 3 черных. Наугад из каждой урны берут по два шара. Найти вероятность того, что все шары белые.

26. В урне находятся 4 белых и 6 черных шаров. Один за другим, без возвращения в урну, вынимаются наугад два шара. Найти вероятность того, что первый вынутый шар будет черным, а второй – белым.

27. Первая фирма оформила правильно 7 отчетов из 10-ти, вторая фирма – 10 отчетов из 15-ти. Комиссия выбирает наугад по одному отчету каждой фирмы. Найти вероятность того, что оба выбранных отчета оформлены неверно.

28. Контрольная работа состоит из задачи и примера. Вероятность того, что в наугад выбранной работе правильно решена задача, равна $0,8$, а пример – $0,7$. Найти вероятность того, что в наугад выбранной работе правильно решено хотя бы одно задание.

29. Вероятность сдачи студентом зачета равна $0,8$. Если зачет сдан, то студент допускается к экзамену, вероятность сдачи которого равна $0,9$. Найти вероятность того, что студент сдаст зачет и экзамен.

30. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна $0,38$. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна $0,8$.

7. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Пример 1. Экспортно-импортная фирма собирается заключить контракт на поставку сельскохозяйственного оборудования в одну из развивающихся стран. Если основной конкурент фирмы не станет одновременно претендовать

на заключение контракта, то вероятность получения контракта оценивается в 0,45; в противном случае — в 0,25. По оценкам экспертов компании вероятность того, что конкурент выдвинет свои предложения по заключению контракта, равна 0,40. Чему равна вероятность заключения контракта для этой фирмы?

Решение. A = «фирма заключит контракт»; H_1 = «конкурент выдвинет свои предложения»; H_2 = «конкурент не выдвинет свои предложения». По условию задачи $P(H_1) = 0,4$, $P(H_2) = 1 - 0,4 = 0,6$. Условные вероятности по заключению контракта для фирмы $P(A/H_1) = 0,25$, $P(A/H_2) = 0,45$. По формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)$, $P(A) = 0,4 \cdot 0,25 + 0,6 \cdot 0,45 = 0,1 + 0,27 = 0,37$. $P(A) = 0,37$.

Пример 2. Экономист-аналитик условно подразделяет экономическую ситуацию в стране на «хорошую», «посредственную» и «плохую» и оценивает их вероятности для данного момента времени в 0,15; 0,70 и 0,15 соответственно. Некоторый индекс экономического состояния возрастает с вероятностью 0,60, когда ситуация «хорошая»; с вероятностью 0,30, когда ситуация посредственная, и с вероятностью 0,10, когда ситуация «плохая». Пусть в настоящий момент индекс экономического состояния возрос. Чему равна вероятность того, что экономика страны на подъеме?

Решение. A = «индекс экономического состояния страны возрастет», H_1 = «экономическая ситуация в стране «хорошая», H_2 = «экономическая ситуация в стране «посредственная», H_3 = «экономическая ситуация в стране «плохая». По условию: $P(H_1) = 0,15$, $P(H_2) = 0,70$, $P(H_3) = 0,15$. Условные вероятности: $P(A/H_1) = 0,60$, $P(A/H_2) = 0,30$, $P(A/H_3) = 0,10$. Требуется найти вероятность $P(H_1/A)$. Находим ее по формуле Байеса

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)},$$

$$P(H_1 / A) = \frac{0,15 \cdot 0,6}{0,15 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,1} = \frac{0,09}{0,09 + 0,21 + 0,015} = \frac{0,09}{0,315} \approx 0,286 .$$

Пример 3. Трое преподавателей принимают экзамен в группе из 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй – 3, а третий – 21 студента (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго – только 10%, зато у третьего – 70%. а) Найти вероятность того, что слабо подготовившийся студент сдаст экзамен. б) Известно, что студент сдавал экзамен, но получил оценку «неудовлетворительно». Кому из трех преподавателей, вероятнее всего, он отвечал?

Решение. а) Событие, вероятность которого требуется найти A – «слабо подготовившийся студент сдаст экзамен». Рассмотрим также следующие события: B_1 – «слабо подготовившийся студент отвечал первому преподавателю»; B_2 – «слабо подготовившийся студент отвечал второму преподавателю»; B_3 – «слабо подготовившийся студент отвечал третьему преподавателю». События B_1 , B_2 и B_3 являются несовместными и образуют полную группу, причем событие A может наступить лишь вместе с одним из этих событий. Следовательно, B_1 , B_2 и B_3 – гипотезы по отношению к A .

По формуле полной вероятности,

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) .$$

Найдем $P(B_1)$ – вероятность того, что слабо подготовившийся студент отвечал первому преподавателю. По условию задачи из 30 человек 6 отвечают первому преподавателю. Значит, $P(B_1) = \frac{6}{30} = 0,2$.

$$\text{Аналогично, } P(B_2) = \frac{3}{30} = 0,1 , P(B_3) = \frac{21}{30} = 0,7 .$$

Найдем условную вероятность $P_{B_1}(A)$ – вероятность того, слабо подготовившийся студент сдал экзамен при условии, что он отвечал первому

преподавателю. По условию задачи $P_{B_1}(A) = 0,4$. Аналогично, $P_{B_2}(A) = 0,1$, $P_{B_3}(A) = 0,7$.

Тогда

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = 0,4 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,7 = 0,58.$$

б) Пусть студент сдавал экзамен, но получил оценку «неудовлетворительно». Отметим, что $\bar{A}$ - событие «слабо подготовившийся студент не сдал экзамен». Найдем вероятность того, что студент, не сдавший экзамен, отвечал первому преподавателю. Она может быть найдена по формуле Байеса: $P_{\bar{A}}(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(\bar{A})}{P(\bar{A})}$.

Найдем $P(\bar{A})$ и $P_{B_1}(\bar{A})$. Так как для произвольного события X выполняется равенство $P(X) + P(\bar{X}) = 1$, то вероятность получить оценку «неудовлетворительно» равна $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,58 = 0,42$. Далее, по условию задачи, вероятность сдачи экзамена слабо подготовившимся студентом первому преподавателю равна 0,4. Значит, вероятность не сдать экзамен первому преподавателю равна $P_{B_1}(\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$. Следовательно,

$$P_{\bar{A}}(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,2 \cdot 0,6}{0,42} = 0,285.$$

$$\text{Аналогично, } P_{B_2}(\bar{A}) = 1 - 0,1 = 0,9 \text{ и } P_{\bar{A}}(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,1 \cdot 0,9}{0,42} = 0,214;$$

$$P_{B_3}(\bar{A}) = 1 - 0,7 = 0,3 \text{ и } P_{\bar{A}}(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{0,42} = 0,5.$$

Отсюда следует, что, вероятнее всего, слабо подготовившийся студент сдавал экзамен третьему преподавателю.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Решить задачу, используя формулы полной вероятности, Байеса и классическое определение вероятности:

1. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20 % телевизоров со скрытым дефектом, второго — 10 % и третьего — 5 %. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30 % телевизоров с первого завода, 20 % — со второго и 50 % — с третьего?

2. Курс доллара повышается в течение квартала с вероятностью 0,9 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса доллара фирма рассчитывает получить прибыль с вероятностью 0,85; при понижении — с вероятностью 0,5. Найти вероятность того, что фирма получит прибыль.

3. Из 10 студентов, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей и взявших билеты, Иванов и Петров знают по 20 билетов из 30, Сидоров успел повторить только 15 билетов, остальные студенты знают все 30 билетов. Экзаменатор наудачу вызывает отвечать одного из студентов. Какова вероятность того, что вызванный сдал экзамен, если знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а при незнании билета можно сдать экзамен лишь с вероятностью 0,1?

4. В ящике лежит 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 иггранных. Для игры наудачу выбираются два мяча, и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются еще два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

5. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность 1-го автомата вдвое больше производительности 2-го. 1-й автомат производит в среднем 60 % деталей отличного качества, а второй — 84 %. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена: а) 1-м автоматом; б) 2-м автоматом.

6. Исследованиями психологов установлено, что мужчины и женщины по-разному реагируют на некоторые жизненные обстоятельства. Результаты исследований показали, что 70 % женщин позитивно реагируют на

изучаемый круг ситуаций, в то время как 40 % мужчин реагируют на них негативно. 15 женщин и 5 мужчин заполнили анкету, в которой отразили свое отношение к предлагаемым ситуациям. Случайно извлеченная анкета содержит негативную реакцию. Чему равна вероятность того, что ее заполнял мужчина?

7. Число грузовых машин, проезжающих мимо бензоколонки, относится к числу легковых машин как 3:2. Вероятность того, что грузовая машина будет заправляться, равна 0,1, легковая — 0,2. Найти вероятность того, что заправляющаяся у бензоколонки машина — грузовая.

8. В группе из 25 человек, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей, 10 отличников, 7 подготовленных хорошо, 5 — удовлетворительно и 3 человека плохо подготовлены. Отличники знают все 25 вопросов программы, хорошо подготовленные — 20, подготовленные удовлетворительно — 15, и плохо подготовленные знают лишь 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на два заданных вопроса. Найти апостериорные вероятности гипотез: H_1 = «студент подготовлен отлично или хорошо», H_2 = «студент подготовлен удовлетворительно», H_3 = «студент подготовлен плохо».

9. Расследуются причины неудачного запуска космической ракеты, о котором можно высказать четыре предположения (гипотезы) H_1 , H_2 , H_3 и H_4 . По данным статистики $P(H_1) = 0,2$, $P(H_2) = 0,4$, $P(H_3) = 0,3$, $P(H_4) = 0,1$. В ходе расследования обнаружено, что при запуске произошла утечка топлива (событие A). Условные вероятности события A , согласно той же статистике, равны: $P(A/H_1) = 0,8$, $P(A/H_2) = 0,1$, $P(A/H_3) = 0,2$, $P(A/H_4) = 0,3$. Какая из гипотез наиболее вероятна при данных условиях?

10. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно 0,3; 0,5; 0,2. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для первой кассы 0,6; для второй — 0,4; для третьей — 0,3. Пассажир направился за

билетом в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что эта была первая касса.

11. Количество акций, представленных 4 различными предприятиями на наличный рынок, относятся как $5 : 4 : 1 : 10$. Вероятности того, что акции будут котироваться по 25 тыс. за штуку для этих предприятий соответственно равны 0,5; 0,6; 0,7; 0,8. Известно, что цена случайно выбранной акции составила 25 тыс. руб. Найти вероятность того, что эта акция представлена вторым предприятием.

12. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит выстрел. Цель поражена. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго – 0,5, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что выстрел произведен третьим стрелком.

13. Имеются две урны. В первой урне два белых и три черных шара, во второй – три белых и пять черных. Из первой и второй урн, не глядя, берут по одному шару и кладут их в третью урну. Шары в третьей урне перемешивают и берут из нее наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

14. На сборку попадают детали с 3 станков. Известно, что первый станок дает 0,3 % брака, второй – 0,2 % и третий – 0,4 %. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого станка поступило 1000 деталей, со второго – 2000 деталей и с третьего – 2500 деталей.

15. Студент выучил к экзамену 15 билетов из 20. Что для него предпочтительнее – идти сдавать экзамен первым или вторым?

16. В страховой компании 500 начинающих и 2000 опытных водителей. В среднем 10 % начинающих и 2 % опытных водителей в течение года попадают в аварию. Один из водителей попал в аварию. Какова вероятность того, что это был опытный водитель?

17. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во втором – 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем – 10 деталей, из них 6

стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика стандартная.

18. Вероятность того, что клиент банка не вернет кредит в период экономического роста, равна 0,04, а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный клиент банка не вернет полученный кредит?

19. В группе спортсменов 20 пловцов, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнения квалификационной нормы для пловца равна 0,9, для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. Наудачу вызванный спортсмен выполнил норму. Найти вероятность того, что он – пловец.

20. Курортная гостиница будет заполнена в июле с вероятностью 0.92, если будет солнечная погода, или с вероятностью 0.72, если будет дождливая погода. По оценкам синоптиков в данной местности в июле бывает 75% солнечных дней. Какова вероятность того, что гостиница будет заполнена?

21. Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом на рынке, если конкурент не выпустит в продажу аналогичный товар, равна 0,67. Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом при наличии на рынке конкурирующего товара, равна 0,42. Вероятность того, что конкурирующая фирма выпустит на рынок аналогичный товар в течение интересующего нас периода, равна 0,35. Чему равна вероятность того, что товар будет иметь успех?

22. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95, а для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Какова вероятность поражения стрелком мишени из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

23. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше

производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом?

24. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шара, во второй – 6 белых и 4 черных. Случайным образом выбирается урна, из нее наугад вынимается шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется белым. Какова вероятность того, что шар был вынут из второй урны?

25. Вся продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый контролер проверяет 55% изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, второй – 0,02. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Какова вероятность того, что оно проверялось вторым контролером?

26. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием K , 30% – с заболеванием L , 20% – с заболеванием M . Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7, для болезней L и M эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что поступивший в больницу, будет выписан здоровым. Какова вероятность того, что этот больной страдал заболеванием L .

27. В страховой компании 50% застрахованных относятся к классу малого риска, 30% - к классу среднего и 20% - к классу высокого риска. Вероятность наступления страхового случая для лиц класса малого риска равна 0,01, среднего – 0,03, высокого – 0,08. Найти вероятность того, что застрахованному придется выплачивать денежное вознаграждение за период страхования. Какова вероятность того, что получивший денежное вознаграждение застрахованный относится к классу малого риска?

28. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному

шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар. Какова вероятность того, что этот шар из второй урны?

29. Два стрелка стреляют по одной и той же мишени независимо друг от друга. Вероятность попадания в мишень у первого стрелка равна $0,4$, а у второго – $0,6$. Известно, что после стрельбы в мишени обнаружена только одна пробоина. Что вероятнее: при этом в мишень попал первый стрелок или второй?

30. В оружейном шкафу хранятся 6 пистолетов Макарова и 4 пистолета ТТ. Вероятность поражения мишени из пистолета Макарова равна $0,7$, из пистолета ТТ – $0,8$. Найти вероятность поражения стрелком мишени из наугад взятого пистолета. Какова вероятность того, что стрелок стрелял из пистолета ТТ?

8. Схема Бернулли.

Пример 1. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются)?

Решение. Проверим, удовлетворяет ли рассматриваемый в задаче эксперимент схеме Бернулли:

1) В качестве одного испытания можно рассматривать одну партию игры в шахматы, число партий $n=4$ или $n=6$. Испытания являются независимыми (две партии проводятся независимо друг от друга).

2) Каждое испытание (каждая партия) имеет две возможности:

A – игрок выигрывает партию и $\bar{A}$ – игрок проигрывает партию;

3) Вероятность наступления события A равна $p = \frac{1}{2}$; вероятность проигрыша равна $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Таким образом, эксперимент удовлетворяет схеме Бернулли.

Найдем вероятность выигрыша двух партий из четырех. По формуле Бернулли имеем $P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$.

Найдем вероятность выигрыша трех партий из шести. По формуле Бернулли имеем $P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$.

Так как $P_4(2) = \frac{6}{16} > \frac{5}{16} = P_6(3)$, то вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести.

Ответ: вероятнее выиграть две партии из четырех, чем три из шести.

Замечание. При решении задач по формуле Бернулли, необходимо установить, что рассматриваемый эксперимент удовлетворяет схеме Бернулли. После этого вводят соответствующие обозначения и применяют формулу Бернулли.

Пример 2. Изделия некоторого производства содержат 5 % брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад изделий: а) нет ни одного испорченного; б) будут два испорченных.

Решение. а) По условию задачи $n = 5$, $p = 0,05$. Так как вероятность наступления события A (появление бракованной детали) постоянна для каждого испытания, то задача подходит под схему Бернулли. Находим вероятность того, что среди пяти взятых наудачу изделий нет ни одного испорченного $n = 5$, $m = 0$, $p = 0,05$. По формуле Бернулли

$$\text{а) } P_{0;5} = C_5^0 \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^5 = 1 \cdot 1 \cdot 0,774 = 0,774 ;$$

$$\text{б) } n = 5, m = 2, p = 0,05 ,$$

$$P_{2;5} = C_5^2 \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} 0,0025 \cdot 0,857 = 0,021 .$$

Пример 3. а) Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

б) Сколько надо произвести независимых испытаний с вероятностью появления события в каждом испытании, равной 0,4, чтобы наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях было равно 25?

Решение. а) По условию, $n=15$, $p=0,9$, $q=1-0,9=0,1$. Найдем наивероятнейшее число k_0 из двойного неравенства $np - q \leq k_0 < np + p$.

Подставив данные задачи, получим $15 \cdot 0,9 - 0,1 \leq k_0 < 15 \cdot 0,9 + 0,9$, или $13,5 \leq k_0 < 14,4$.

Так как k_0 — целое число и поскольку между числами 13,5 и 14,4 заключено одно целое число, а именно, 14, то искомое наивероятнейшее число $k_0 = 14$.

б) По условию, $k_0 = 25$, $p=0,4$, $q=0,6$. Воспользуемся двойным неравенством $np - q \leq k_0 < np + p$.

Подставляя данные задачи, получим систему неравенств для определения неизвестного числа:

$$\begin{cases} 0,4n - 0,6 \leq 25, \\ 0,4n + 0,4 > 25. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы найдем $n \leq \frac{25,6}{0,4} = 64$, из второго неравенства системы имеем $n > \frac{24,6}{0,4} = 61,5$.

Итак, искомое число испытаний должно удовлетворять двойному неравенству $62 \leq n \leq 64$.

Ответ: а) $k_0 = 14$; б) число испытаний n должно удовлетворять двойному неравенству $62 \leq n \leq 64$.

Пример 4. Вероятность попадания в кольцо при штрафном броске для баскетболиста равна 0,8. Сколько надо произвести бросков, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно 20?

Решение. Известно, что $p = 0,8$, $m_0 = 20$. Тогда $q = 1 - 0,8 = 0,2$ и n найдем из системы неравенств

$$\begin{cases} n \cdot 0,8 - 0,2 \leq 20 \\ n \cdot 0,8 + 0,8 \geq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq \frac{20,2}{0,8} \\ n \geq \frac{19,2}{0,8} \end{cases} \Leftrightarrow 24 \leq n \leq 25,25.$$

Так как n — целое число, то $n = 24$ или $n = 25$.

Ответ: 24 или 25.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Решить задачу, используя схему Бернулли:

1. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней 3 дня окажутся дождливыми?

2. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен) три партии из четырех или пять из восьми?

3. Игральная кость подбрасывается 5 раз. Найти вероятность того, что два раза появится число очков, кратное трем.

4. Экзаменационный билет состоит из пяти вопросов в виде теста с тремя возможными ответами на каждый из пяти вопросов, из которых нужно выбрать один правильный. Какова вероятность сдать экзамен методом простого угадывания, если достаточно ответить хотя бы на 4 вопроса?

5. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет не менее трех раз.

6. Производится шесть выстрелов по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,7. Какова вероятность того, что этого в мишени окажется 4 пробоины.

7. Случайным образом подбрасывается монета. Что вероятнее: то, что «герб» выпадет три раза при четырех подбрасываниях, или то, что «герб» выпадет пять раз при восьми попаданиях?

8. В систему противовоздушной обороны входят два зенитных комплекса, каждый из которых поражает цель – самолет противника с вероятностью 0,6 независимо друг от друга. Найти вероятность поражения 4 самолетов противника, если в воздушном налете участвовало 7 самолетов.

9. Вероятность вынесения обвинительного приговора обвиняемому в суде равна 0,6. Найти вероятность осуждения 6 обвиняемых при рассмотрении 10 независимых уголовных дел в суде.

10. Ежедневно новая сделка совершается с вероятностью 0,2 (но не более одной в день). Какова вероятность того, что за 5 дней будет совершено 3 сделки?

11. В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью $\frac{1}{4}$. Какова вероятность того, что из 10 визитов страхового агента 5 закончатся заключением договора?

12. Для вычислительной лаборатории приобретено 9 компьютеров, причем вероятность брака для одного компьютера равна 0,1. Какова вероятность того, что придется заменить не более одного компьютера?

13. Зачетная работа по предмету состоит из 5 задач, при этом зачет считается сданным, если студент решил хотя бы три из них. Студент Иванов может решить каждую задачу с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что он сдаст зачет?

14. Тест по теории вероятностей состоит из 10 вопросов. На каждый вопрос в тесте предлагается 4 варианта ответа, из которых нужно выбрать один правильный. Какова вероятность того, что, будучи совершенно не готовым, студент угадает ответы на 7 вопросов?

15. Статистика аудиторских проверок компании утверждает, что вероятность обнаружения ошибки в каждом проверяемом документе равна 0,1. Какова вероятность того, что из 10 проверенных документов более 8 не будут содержать ошибки?

16. Из полной колоды карт (52 карты) извлекается 6 раз по одной карте с возвращением карты в колоду. Какова вероятность того, что 4 раза появится дама?

17. Игральный кубик подбрасывается 5 раз. Найти вероятность того, что 3 очка выпадет не менее 3 раз.

18. Всхожесть семян ржи составляет 85%. Чему равна вероятность того, что из восьми посеянных семян взойдут шесть?

19. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Что вероятнее: отказ 4 приборов при испытании 20 или отказ 6 приборов при испытании 30, если приборы испытываются независимо друг от друга?

20. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточную норму, равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение 5 рабочих дней из 7 перерасхода электроэнергии не будет?

21. Какова вероятность того, что при 10 бросаниях игральной кости пятерка выпадет не менее восьми раз?

22. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3. Какова вероятность того, что при 6 бросках 3 кольца окажутся на колышке, если броски считать независимыми?

Задание 2. Решить задачу:

1. Отдел технического контроля проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

2. Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже.

3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна $0,85$. Стрелок сделал 25 независимых выстрелов. Найти наивероятнейшее число попаданий.

4. Вероятность получения удачного результата при производстве сложного химического опыта равна 75% . Найти наивероятнейшее число удачных опытов, если общее их количество равно 10.

5. Система состоит из шести независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента равна $0,3$. Найти наивероятнейшее число отказавших элементов.

6. В цехе независимо друг от друга работают 4 станка, причем вероятность остановки в течение часа для каждого из них равна $0,8$. Найти наивероятнейшее число остановившихся станков.

7. В коробке 20 синих и 20 желтых шаров. Из коробки 6 раз вынимали по одному шару, возвращая каждый вынутый шар в коробку. Найти наивероятнейшее число появлений желтого шара.

8. Батарея произвела шесть выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна $0,3$. Найти наивероятнейшее число попаданий.

9. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна $0,3$. Найти число испытаний n , при котором наивероятнейшее число появлений события равно 20.

10. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30?

11. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?

12. Известно, что вероятность прорастания семян данной партии пшеницы $0,95$. Сколько семян следует взять из этой партии, чтобы наивероятнейшее число взошедших семян равнялось 100?

13. Сколько нужно сделать выстрелов с вероятностью попадания в цель $0,7$, чтобы наивероятнейшее число попаданий в цель было равно 15 ?

14. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число появлений четного числа очков было равно 6 ?

15. Сколько следует сыграть партий в шахматы с вероятностью победы в одной партии, равной $1/3$, чтобы наивероятнейшее число побед было равно 5 ?

16. Игральная кость брошена 16 раз. Найти наивероятнейшее число бросаний, при которых выпало четное число очков.

17. Производится 12 независимых испытаний с вероятностью успеха, равной $0,4$. Найти наиболее вероятное число неудач.

18. На контроль поступила партия деталей из цеха. Известно, что 5% всех деталей не удовлетворяет стандарту. Сколько нужно испытать деталей, чтобы с вероятностью не менее $0,95$ обнаружить хотя бы одну нестандартную деталь?

19. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при броске равна $0,4$. Произведено 10 бросков. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

20. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна $0,3$. Найти число испытаний n , при котором наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях будет равно 30 .

21. Доля крупных заказов в строительной фирме составляет 40% . Чему равно наивероятнейшее число крупных заказов, если фирма предполагает заключить 120 договоров на следующий год? .

22. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 30 ?

23. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?

ГЛАВА 3

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

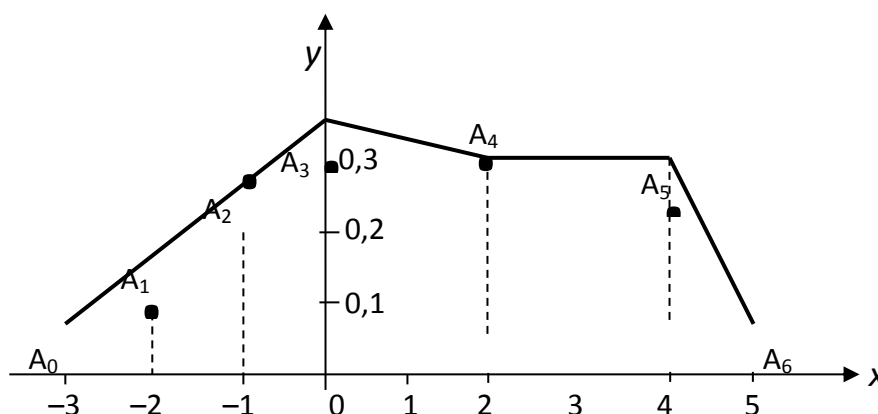
1. Случайные величины.

Пример 1. Пусть X — дискретная случайная величина, заданная рядом распределения

X	-2	-1	0	2	4
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Построить полигон и многоугольник распределения вероятностей.

Решение. На оси X откладываем значения x_i , равные -2, -1, 0, 2, 4, а по вертикальной оси вероятности этих значений:



Точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 изображают полигон распределения, а ломаная $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ — многоугольник распределения вероятностей.

Пример 2. В аккредитации участвуют 4 коммерческих вуза. Вероятности пройти аккредитацию и получить сертификат для этих вузов, соответственно равны 0,5; 0,4; 0,3; 0,2. Составить закон распределения числа коммерческих вузов, не прошедших аккредитацию. Найти числовые характеристики этого распределения.

Решение. В качестве случайной величины X выступает число коммерческих вузов, не прошедших аккредитацию. Возможные значения, которые может принять случайная величина X : 0, 1, 2, 3, 4.

Для составления закона распределения необходимо рассчитать соответствующие вероятности. Обозначим через событие A_1 — первый вуз прошел аккредитацию, A_2 — второй, A_3 — третий, A_4 — четвертый. Тогда $P(A_1) = 0,5$; $P(A_2) = 0,4$; $P(A_3) = 0,3$; $P(A_4) = 0,2$. Вероятности для вузов не пройти аккредитацию соответственно равны $P(\overline{A_1}) = 1 - 0,5 = 0,5$; $P(\overline{A_2}) = 1 - 0,4 = 0,6$; $P(\overline{A_3}) = 1 - 0,3 = 0,7$; $P(\overline{A_4}) = 1 - 0,2 = 0,8$.

Тогда имеем:

$$P(X = 0) = P(A_1 A_2 A_3 A_4) = 0,012 .$$

$$P(X = 1) = P(\overline{A_1} A_2 A_3 A_4) + P(A_1 \overline{A_2} A_3 A_4) + P(A_1 A_2 \overline{A_3} A_4) + P(A_1 A_2 A_3 \overline{A_4}) = 0,106 .$$

$$P(X = 2) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3 A_4) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4) + P(\overline{A_1} A_2 A_3 \overline{A_4}) + P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} A_4) + \\ + P(A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4}) + P(A_1 A_2 \overline{A_3} \overline{A_4}) = 0,320 .$$

$$P(X = 3) = P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \overline{A_4}) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \overline{A_4}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3 \overline{A_4}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} A_4) = 0,394 .$$

$$P(X = 4) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \overline{A_4}) = 0,168 .$$

Запишем закон распределения в виде таблицы

X	0	1	2	3	4
P	0,012	0,106	0,320	0,394	0,168

Проверка: $0,012 + 0,106 + 0,32 + 0,394 + 0,168 = 1$.

Вычислим

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 0 \cdot 0,012 + 1 \cdot 0,106 + 2 \cdot 0,320 + 3 \cdot 0,394 + 4 \cdot 0,168 = 2,6 .$$

Вычислим $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i = 0 \cdot 0,012 + 1 \cdot 0,106 + 4 \cdot 0,32 + 9 \cdot 0,394 + 16 \cdot 0,168 = 7,62 ,$$

$$(M(X))^2 = 2,6^2 = 6,76 . D(X) = 7,62 - 6,76 = 0,86 .$$

Пример 3. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые последовательно посетит студент, чтобы взять необходимую книгу, если в городе 3 библиотеки.

Решение. В качестве случайной величины X выступает число библиотек, которые посетит студент, чтобы получить необходимую книгу. Возможные значения, которые примет случайная величина X : 1, 2, 3.

Обозначим через событие A_1 — книга свободна в первой библиотеке, A_2 — во второй, A_3 — в третьей. Тогда $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 0,3$. Вероятность противоположного события, что книга занята $P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = P(\overline{A_3}) = 1 - 0,3 = 0,7$.

Для составления закона распределения рассчитаем соответствующие вероятности:

$$P(X = 1) = P(A_1) = 0,3 ,$$

$$P(X = 2) = P(\overline{A_1}A_2) = P(\overline{A_1})P(A_2) = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21 ,$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3) + P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = \\ &= 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,147 + 0,343 = 0,49 . \end{aligned}$$

Запишем закон распределения в виде таблицы.

X	1	2	3
P	0,3	0,21	0,49

$$\text{Проверка: } 0,3 + 0,21 + 0,49 = 1.$$

Пример 4. Из поступающих в ремонт 10 часов 7 нуждаются в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в чистке, рассматривает их поочередно и, найдя такие часы, прекращает дальнейший просмотр. Составить закон

распределения числа просмотренных часов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. В качестве случайной величины X выступает число просмотренных часов. Возможные значения, которые примет случайная величина X : 1, 2, 3, 4. Все значения случайной величины зависимы.

Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений. Для расчета вероятностей будем использовать формулу классической вероятности и теорему умножения для зависимых событий.

Пусть событие A_1 — первые, взятые наугад, часы, нуждающиеся в чистке, A_2 — вторые, A_3 — третьи, A_4 — четвертые. Тогда имеем:

$$P(X = 1) = P(A_1) = \frac{7}{10},$$

$$P(X = 2) = P(\overline{A_1}A_2) = P(\overline{A_1})P(A_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30},$$

$$P(X = 3) = P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{120},$$

$$P(X = 4) = P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}A_4) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(A_4) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{7} = \frac{1}{120}.$$

Запишем закон распределения в виде таблицы

X	1	2	3	4
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

Проверим, что $\sum_{i=1}^n p_i = 1$:

$$\frac{7}{10} + \frac{7}{30} + \frac{7}{120} + \frac{1}{120} = \frac{84 + 28 + 7 + 1}{120} = \frac{120}{120} = 1.$$

Вычислим математическое ожидание случайной величины по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 1 \cdot \frac{7}{10} + 2 \cdot \frac{7}{30} + 3 \cdot \frac{7}{120} + 4 \cdot \frac{1}{120} = \frac{33}{24} = \frac{11}{8}.$$

Вычислим дисперсию случайной величины по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

$$\text{Вычислим } M(X^2) = 1 \cdot \frac{7}{10} + 4 \cdot \frac{7}{30} + 9 \cdot \frac{7}{120} + 16 \cdot \frac{1}{120} = \frac{55}{24},$$

$$D(X) = \frac{55}{24} - \left(\frac{33}{24}\right)^2 = \frac{55}{24} - \frac{1089}{576} = \frac{231}{576} = \frac{77}{192}.$$

Пример 5. Известно, что в определенном городе 20 % горожан добираются на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека. Составить закон распределения числа людей, добирающихся на работу личным автотранспортом. Найти числовые характеристики этого распределения. Написать функцию распределения и построить ее график.

Решение. В качестве случайной величины X выступает число людей в выборке, которые добираются на работу личным автотранспортом. Возможные значения, которые может принять случайная величина X : 0, 1, 2, 3, 4.

Вероятность того, что каждый из отобранных людей, которые добираются на работу личным автотранспортом, постоянна и равна $p = 0,2$. Вероятность противоположного события, т.е. того, что каждый из отобранных людей добирается на работу не личным автотранспортом, равна $q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$. Все 4 испытания независимы. Случайная величина $X = m$ подчиняется биномиальному закону распределения вероятностей с параметрами $n = 4$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений.

Расчет искомых вероятностей осуществляется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

$$P(X=0) = P_4(0) = C_4^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{4-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0,8^4 = 0,4096,$$

$$P(X=1) = P_4(1) = C_4^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{4-1} = 4 \cdot 0,2 \cdot 0,8^3 = 0,4096,$$

$$P(X=2) = P_4(2) = C_4^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{4-2} = 6 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^2 = 0,1536,$$

$$P(X=3) = P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{4-3} = 4 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8 = 0,0256,$$

$$P(X=4) = P_4(4) = C_4^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{4-4} = 1 \cdot 0,2^4 \cdot 1 = 0,0016.$$

Запишем закон распределения в виде таблицы

X	0	1	2	3	4
P	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Так как все возможные значения случайной величины образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей должна быть равна 1.

$$\text{Проверка: } 0,4096 + 0,4096 + 0,1536 + 0,0256 + 0,0016 = 1.$$

Найдем числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Математическое ожидание может быть рассчитано по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 0 \cdot 0,4096 + 1 \cdot 0,4096 + 2 \cdot 0,1536 + 3 \cdot 0,0256 + 4 \cdot 0,0016 = 0,8.$$

Так как случайная величина подчиняется биномиальному закону, то для расчета математического ожидания можно воспользоваться формулой

$$M(X) = np = 4 \cdot 0,2 = 0,8.$$

Дисперсия случайной величины может быть рассчитана по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2: (M(X))^2 = 0,8^2 = 0,64,$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i = 0 \cdot 0,4096 + 1 \cdot 0,4096 + 4 \cdot 0,1536 + 9 \cdot 0,0256 + 16 \cdot 0,0016 = 1,28,$$

$D(X) = 1,28 - 0,64 = 0,64$. В данном случае дисперсию можно рассчитать по формуле $D(X) = npq = 4 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,64$.

Рассчитаем среднее квадратическое отклонение случайной величины по формуле $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,64} = 0,8$.

Составим функцию распределения случайной величины X по формуле $F(x) = P(X < x)$.

$$1. \quad x \leq 0, \quad F(x) = 0.$$

$$2. \quad 0 < x \leq 1, \quad F(x) = 0,4096.$$

$$3. \quad 1 < x \leq 2, \quad F(x) = 0,4096 + 0,4096 = 0,8192.$$

$$4. \quad 2 < x \leq 3, \quad F(x) = 0,4096 + 0,4096 + 0,1536 = 0,9728.$$

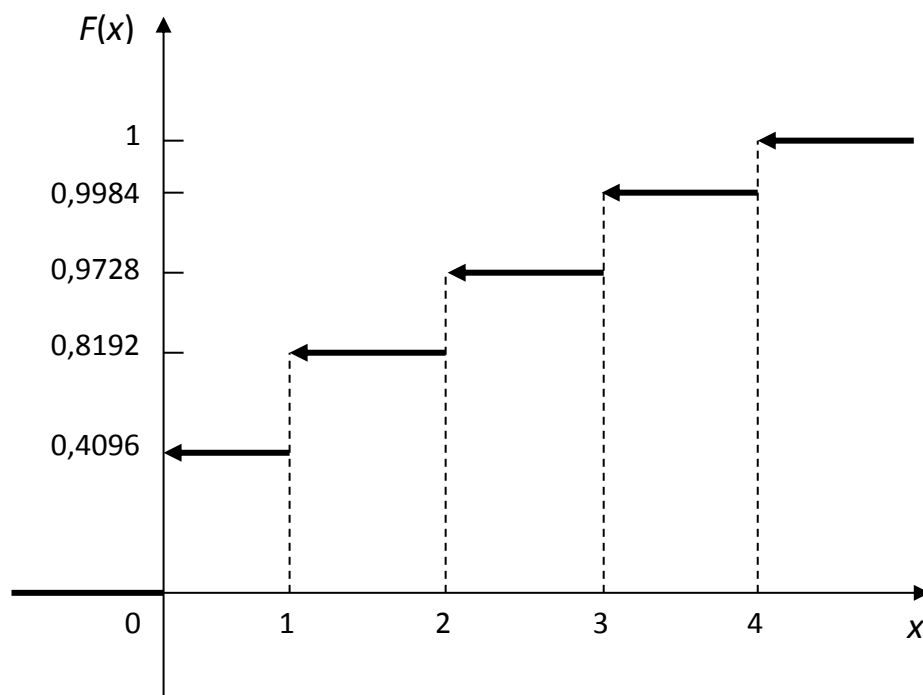
$$5. \quad 3 < x \leq 4, \quad F(x) = 0,4096 + 0,4096 + 0,1536 + 0,0256 = 0,9984.$$

$$6. \quad x > 4, \quad F(x) = 1.$$

Запишем функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,4096, & 0 < x \leq 1; \\ 0,8192, & 1 < x \leq 2; \\ 0,9728, & 2 < x \leq 3; \\ 0,9984, & 3 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

График функции распределения вероятностей имеет ступенчатый вид. Скачки равны вероятностям, с которыми случайная величина принимает возможные значения.



Пример 6. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение. В качестве случайной величины X выступает число кредитов, возвращенных клиентами в срок. Возможные значения, которые может принять случайная величина X : 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Вероятность того, что каждый клиент возвратит кредит в срок, постоянна и равна $p = 0,9$. Вероятность того, что кредит не будет возвращен в срок, равна $q = 1 - 0,9 = 0,1$. Все 5 испытаний независимы. Случайная величина подчиняется биномиальному распределению с параметрами $n = 5$; $p = 0,9$; $q = 0,1$; $X = m$. Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений. Расчет искомых вероятностей осуществляется по формуле Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

$$P(X = 0) = P_5(0) = C_5^0 \cdot 0,9^0 \cdot 0,1^5 = 0,1^5 = 0,00001,$$

$$P(X = 1) = P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,9^1 \cdot 0,1^4 = 5 \cdot 0,9 \cdot 0,1^4 = 0,00045,$$

$$P(X = 2) = P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^3 = 10 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^3 = 0,0081,$$

$$P(X = 3) = P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^2 = 10 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^2 = 0,0729,$$

$$P(X = 4) = P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1^1 = 5 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1 = 0,32805,$$

$$P(X = 5) = P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,9^5 \cdot 0,1^0 = 0,9^5 = 0,59049.$$

Запишем закон распределения в виде таблицы

X	0	1	2	3	4	5
P	0,00001	0,00045	0,0081	0,0729	0,32805	0,59049

Математическое ожидание вычислим по формуле

$$M(X) = np = 5 \cdot 0,9 = 4,5.$$

Дисперсию вычислим по формуле $D(X) = npq = 5 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,45$.

Пример 7. Из 10 телевизоров на выставке оказались 4 телевизора фирмы «Сони». Наудачу для осмотра выбраны 3 телевизора. Составить закон распределения числа телевизоров фирмы «Сони» среди 3 отобранных.

Решение. В качестве случайной величины X выступает число телевизоров фирмы «Сони». Возможные значения, которые может принять случайная величина X : 0, 1, 2, 3. Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений. Эти вероятности можно рассчитать по формуле

$$\text{классической вероятности } p = \frac{m}{n}: P(X = 0) = \frac{C_4^0 C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}, P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$$

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2} \quad P(X = 3) = \frac{C_4^3 C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}.$$

Запишем закон распределения

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Убедимся, что $\sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{5 + 15 + 9 + 1}{30} = \frac{30}{30} = 1$.

Пример 8. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2 , причем $x_2 > x_1$. Вероятность того, что X примет значение x_1 , равна 0,6. Найти закон распределения величины X , если математическое ожидание $M(X) = 1,4$; $D(X) = 0,24$.

Решение. Сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице, поэтому вероятность того, что X примет значение $x_2 = 1 - 0,6 = 0,4$. Напишем закон распределения X

X	x_1	x_2
P	0,6	0,4

Для того чтобы отыскать x_1 и x_2 необходимо составить два уравнения. Из условия задачи следует, что $M(X) = 0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4$,
 $D(X) = 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 - 1,4^2 = 0,24$.

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4, \\ 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 = 2,2. \end{cases}$$

Решив эту систему, имеем $x_1 = 1$; $x_2 = 2$ и $x_1 = 1,8$; $x_2 = 0,8$.

По условию $x_2 > x_1$, поэтому задаче удовлетворяет лишь первое решение, т.е. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$. Тогда закон распределения имеет вид

X	1	2
P	0,6	0,4

Задачи для самостоятельного решения.

1. Составить закон распределения случайной величины X – числа появления герба при двух бросаниях монеты.

2. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента при включении равна 0,1. Составить закон распределения числа элементов, отказавших при включении.

3. Три стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, для второго - 0,4, для третьего - 0,5. Пусть X - число попаданий в мишень при одном залпе. Составить закон распределения X , записать функцию распределения $F(x)$.

4. В партии из 6 деталей стандартны 4 детали. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

5. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Составить закон распределения X - числа патронов, выданных стрелку.

6. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается четыре выигрыша по 5 тысяч рублей; пять выигрышей по 4 тысячи рублей и одиннадцать выигрышей по 1 тысячи рублей.

7. Монета брошена три раза. Составьте закон распределения случайной величины X – числа выпадений герба, постройте многоугольник распределения. Найдите числовые характеристики этой случайной величины.

8. Стрелок попадает в мишень при одном выстреле с вероятностью 0,3. Имея три патрона, он стреляет до первого попадания или пока не кончатся патроны. Составьте закон распределения случайной величины X – числа израсходованных патронов. Найдите функцию распределения этой случайной величины и постройте ее график. Вычислите числовые характеристики случайной величины X .

9. Среди 10 изготовленных приборов 3 неточных. Составить закон распределения числа неточных приборов среди взятых наудачу 4 приборов.

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. Составить функцию распределения случайной величины и построить ее график.

10. В магазине продаются 5 отечественных и 3 импортных телевизора. Составить закон распределения случайной величины — числа импортных из 4 наудачу взятых телевизоров. Найти функцию распределения и построить ее график.

11. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй — 0,8, третьей — 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете и вычислить математическое ожидание и дисперсию.

12. Поступающий в институт должен сдать 3 экзамена. Вероятность сдачи первого экзамена 0,9, второго — 0,8, третьего — 0,7. Следующий экзамен поступающий сдает только в случае успешной сдачи предыдущего. Составить закон распределения числа приходов на экзамен для лица, поступающего в институт. Найти математическое ожидание случайной величины.

13. В городе 4 коммерческих банка. У каждого риск банкротства в течение года составляет 10 %. Составить закон распределения числа банков, которые могут обанкротиться в течение следующего года и найти числовые характеристики этого распределения.

14. Вероятность поражения земляники вирусным заболеванием равна 0,2. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

15. В урне находятся шары трех весов 3, 4 и 5 кг с соответствующими вероятностями 0,2; 0,3; 0,5. Извлекаются два шара с возвращением обратно. Составить закон распределения суммарного веса двух извлеченных шаров. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

16. Производится стрельба из орудия по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,8, при каждом следующем выстреле вероятность попадания уменьшается в 2 раза. Случайная величина X — число попаданий в цель при трех выстрелах. Составить закон распределения случайной величины X .

17. Найти закон распределения числа пакетов трех акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равна соответственно 0,5; 0,6; 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

18. В лотерее разыгрывается один автомобиль стоимостью 5000 ден. ед., четыре телевизора — стоимостью 250 ден. ед. каждый, пять магнитофонов — стоимостью 200 ден. ед. каждый. Продано 1000 билетов стоимостью 7 ден. ед. каждый. Составить закон распределения случайной величины X — чистого выигрыша, полученного участником лотереи, купившим один билет.

19. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2 , причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0,1$ возможного значения x_1 , математическое ожидание $M(X) = 3,9$ и дисперсия $D(X) = 0,09$. Найти закон распределения этой случайной величины.

20. Имеется шесть ключей, из которых только один подходит к замку. Составить закон распределения числа попыток при открывании замка, если испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

21. В магазин поступила обувь с двух фабрик в соотношении 2 : 3. Куплено четыре пары обуви. Построить закон распределения числа купленных пар обуви, изготовленных первой фабрикой. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

2. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева.

Пример 1. Оценить вероятность того, что в течение ближайшего дня потребность в воде в населенном пункте превысит 150 000 л, если среднесуточная потребность в ней составляет 50 000 л.

Решение. Используя неравенство Маркова в виде $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$, получим $P(X \geq 150\,000) \leq \frac{50\,000}{150\,000} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $P(X \geq 150\,000) \leq \frac{1}{3}$.

Пример 2. Среднее число солнечных дней в году для данной местности равно 90. Оценить вероятность того, что в течение года в этой местности будет не более 240 солнечных дней.

Решение. Согласно неравенству $P(X \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$, имеем $P(X \leq 240) \geq 1 - \frac{90}{240} = 1 - 0,375 = 0,625$.

Ответ: $P(X \leq 240) \geq 0,625$.

Пример 3. Длина изготавливаемых деталей является случайной величиной, среднее значение которой 50 мм. Среднеквадратичное отклонение этой величины равно 0,2 мм. Оценить вероятность того, что отклонение длины изготовленной детали от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0,4 мм.

Решение. Для оценки вероятности используем неравенство Чебышева

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$
$$P(|X - 50| < 0,4) \geq 1 - \frac{0,2^2}{0,4^2} = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Ответ: $P(|X - 50| < 0,4) \geq 0,75$.

Пример 4. Среднесуточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 20 000 кВт/ч, а среднеквадратичное отклонение — 200 кВт/ч.

Какого потребления электроэнергии в этом населенном пункте можно ожидать в ближайшие сутки с вероятностью, не меньшей 0,96?

Решение. Воспользуемся неравенством Чебышева $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$. Подставим в правую часть неравенства вместо $D(X)$ величину

$200^2 = 40\,000$, сделаем ее большей или равной 0,96:

$$1 - \frac{40\,000}{\varepsilon^2} \geq 0,96 \Leftrightarrow \frac{40\,000}{\varepsilon^2} \leq 0,04 \Leftrightarrow \varepsilon^2 \geq \frac{40\,000}{0,04}, \quad \varepsilon \geq 1000.$$

Следовательно, в этом населенном пункте можно ожидать с вероятностью не меньшей 0,96 потребление электроэнергии $20\,000 \pm 1000$, т.е. $X \in [19\,000; 21\,000]$.

Ответ: от 19 000 до 21 000.

Задачи для самостоятельного решения

1. Случайная величина X распределена по следующему закону:

X	2,1	2,3	2,5	2,8	3,1	3,3	3,6	3,9	4,0
P	0,05	0,09	0,10	0,12	0,14	0,20	0,16	0,10	0,04

Оценить вероятность того, что она примет значение, не превышающее 3,6, пользуясь законом распределения и неравенством Маркова.

2. Средний вес клубня картофеля равен 150 г. Оценить вероятность того, что наудачу взятый клубень картофеля весит не более 500 г?

3. Среднее значение скорости ветра у земли в данном пункте равно 16 км/ч. Оценить вероятность того, что в этом пункте скорость ветра (при одном наблюдении) не превысит 80 км/ч.

4. Среднее потребление электроэнергии за май населением одного из микрорайонов Минска равно 360 000 кВт/ч. Оценить вероятность того, что потребление электроэнергии в мае текущего года превзойдет 1 000 000 кВт/ч.

5. Среднее квадратическое отклонение ошибки измерения курса самолета $\sigma = 2^\circ$. Считая математическое ожидание ошибки измерения равным нулю, оценить вероятность того, что ошибка при данном измерении курса самолета будет более 5° .

6. Среднее квадратическое отклонение ошибки измерения азимута равно $30'$ (математическое ожидание равно нулю). Оценить вероятность того, что ошибка среднего арифметического трех независимых измерений не превзойдет 1° .

7. Длина изготавливаемых деталей является случайной величиной, среднее значение которой 50 мм. Среднее квадратическое отклонение этой величины равно 0,2 мм. Оценить вероятность того, что отклонение длины изготовленной детали от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0,4 мм.

8. За значение некоторой величины принимают среднеарифметическое достаточно большого числа ее измерений. Предполагая, что среднее квадратическое отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит 5 мм, оценить вероятность того, что при 1000 измерений неизвестной величины отклонение принятого значения от истинного по абсолютной величине не превзойдет 0,5 мм.

9. Среднее квадратическое отклонение каждой из 450 000 независимых случайных величин не превосходит 10. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднеарифметической этих случайных величин от среднеарифметической их математических ожиданий не превзойдет 0,02.

10. Выборочным путем требуется определить средний рост мужчин двадцатилетнего возраста. Какое количество мужчин, отобранных случайным образом, нужно измерить, чтобы с вероятностью, превышающей 0,98, можно было утверждать, что средний рост у отобранной группы будет отличаться от среднего роста всех двадцатилетних мужчин по абсолютной величине не более чем на 1 см. Известно, что среднеквадратичное

отклонение роста для каждого мужчины из отобранной группы не превышает 5 см.

11. Вероятность изготовления нестандартной радиолампы равна 0,04. Какое наименьшее число радиоламп следует отобрать, чтобы с вероятностью 0,88 можно было утверждать, что доля нестандартных радиоламп будет отличаться от вероятности изготовления нестандартной радиолампы по абсолютной величине не более чем на 0,02?

ГЛАВА 4

ПРАКТИКУМ В ФОРМАТЕ ЕГЭ

В данной главе проведена систематизация вероятностных задач, предлагаемых на ЕГЭ по темам и методам решения.

Базовый уровень

I. Классическое определение вероятности.

Анализ и решение задач, в которых вероятность рассматриваемого события вычисляется по формуле классического определения вероятностей, могут быть выполнены по следующей схеме:

- 1) выяснить, в чем состоит испытание, рассматриваемое в задаче;
- 2) сформулировать событие, вероятность наступления которого необходимо найти;
- 3) установить, являются ли исходы испытания попарно несовместными и равновероятными;
- 4) убедиться, что число исходов испытания конечно;
- 5) подсчитать число всех возможных исходов испытания (n);
- 6) подсчитать число исходов испытания, благоприятствующих рассматриваемому событию (m);
- 7) по формуле классического определения вероятности вычислить искомую вероятность.

Пример 1. Вася, Петя, Коля и Лёша бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

Решение. Испытание — бросание жребия. Пусть событие A — «игру начнет Петя». Найдём $P(A)$. Элементарными исходами испытания являются: «игру начнет Вася», «игру начнет Петя», «игру начнет Коля» и «игру начнет Лёша». Эти события равновероятны, попарно несовместны и образуют полную группу. Общее число элементарных событий n равно 4.

Событию A благоприятствует только одно элементарное событие. Поэтому $m = 1$. Тогда, по классическому определению вероятности, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

Пример 2. В случайном эксперименте монету бросили три раза. Какова вероятность того, что орел выпал ровно два раза?

Решение. Испытание – бросание монеты три раза. Пусть событие A – «орел выпал ровно два раза». Орла обозначим буквой О, решку — буквой Р. В описанном эксперименте элементарные исходы — тройки, составленные из букв О и Р. Выпишем их все в таблицу:

Элементарный исход	Число орлов
ООО	3
ООР	2
ОРО	2
ОРР	1
РОО	2
РОР	1
РРО	1
РРР	0

Очевидно, что эти события равновозможны, попарно несовместны и образуют полную группу. Всего исходов получилось 8. Значит, $n = 8$. Событию A благоприятствуют элементарные события ООР, ОРО и РОО (они выделены в таблице). Поэтому $m = 3$. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8} = 0,375$.

Ответ: 0,375.

Задачи для самостоятельного решения

1. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орёл не выпадет ни разу.

2. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что хотя бы один раз выпадет решка.

3. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд будет владеть мячом в начале матча. Команда

«Физик» играет два матча с разными командами. Найдите вероятность того, что оба раза мяч выиграет «Физик».

4. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд будет владеть мячом в начале матча. Команда «Физик» играет два матча с разными командами. Найдите вероятность того, что оба раза «Физик» проиграет мяч.

5. В один день на запись в первый класс независимо друг от друга пришли два будущих первоклассника. Считая, что приходы мальчика и девочки равновероятны, найдите вероятность того, что оба пришедших оказались мальчиками.

6. В один день на запись в первый класс независимо друг от друга пришли два будущих первоклассника. Считая, что приходы мальчика и девочки равновероятны, найдите вероятность того, что пришли мальчик и девочка.

7. На тарелке лежат одинаковые на вид пирожки: 4 с мясом, 8 с капустой и 3 с вишней. Петя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что этот пирожок окажется с вишней.

8. На тарелке лежат одинаковые на вид пирожки: 4 с мясом, 9 с капустой и 3 с вишней. Петя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что этот пирожок окажется с мясом.

9. В кармане у Коли было четыре конфеты – «Взлётная», «Маска», «Ласточка» и «Белочка», а так же ключи от квартиры. Вынимая ключи, Коля случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Маска».

10. В кармане у Миши было четыре конфеты – «Красная шапочка», «Маска», «Взлётная» и «Белочка», а так же ключи от квартиры. Вынимая ключи, Миша случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Маска».

11. Вася, Петя, Олег, Коля и Лёша бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

12. Маша, Настя, Толя, Ренат и Максим бросили жребий – кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должна будет не Настя.

13. В сборнике билетов по математике всего 20 билетов, в 9 из них встречается вопрос по теме «Геометрия». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Геометрия».

14. В сборнике билетов по географии всего 50 билетов, в 8 из них встречается вопрос по теме «Страны Европы». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Страны Европы».

15. В фирме такси в данный момент свободно 15 машин: 3 чёрных, 6 жёлтых и 6 зелёных. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет жёлтое такси.

16. В фирме такси в данный момент свободно 16 машин: 3 чёрных, 4 жёлтых и 9 зелёных. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет жёлтое такси.

17. В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 22 из Великобритании, 19 из Франции, остальные из Германии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Германии.

18. В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 17 из России, 22 из США, остальные из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

19. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 6 спортсменов из Великобритании, 3 спортсмена из Франции, 6 спортсменов из Германии и 10 из Италии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется

жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Франции.

20. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Македонии, 9 спортсменов из Сербии, 7 спортсменов из Хорватии и 5 из Словении. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Македонии.

21. В фирме такси в наличии 40 легковых автомобилей: 12 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на боках, остальные жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

22. В фирме такси в наличии 20 легковых автомобилей: 11 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на боках, остальные жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

23. Фабрика выпускает сумки. В среднем из 120 сумок 6 сумок имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная сумка окажется с дефектом.

24. Фабрика выпускает сумки. В среднем из 150 сумок 3 сумки имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная сумка окажется с дефектом.

25. На борту самолёта 23 места рядом с запасными выходами и 22 места за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир Л. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру Л. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

26. На борту самолёта 19 мест рядом с запасными выходами и 13 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир Л. высокого роста. Найдите

вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру Л. достанется удобное место, если всего в самолёте 400 мест.

27. В ящике находятся чёрные и белые шары, причём чёрных в 4 раза больше, чем белых. Из ящика случайным образом достали один шар. Найдите вероятность того, что он будет белым.

28. В ящике находятся чёрные и белые шары, причём чёрных в 3 раза больше, чем белых. Из ящика случайным образом достали один шар. Найдите вероятность того, что он будет белым.

29. В коробке вперемешку лежат чайные пакетики с чёрным и зелёным чаем, одинаковые на вид, причём пакетиков с чёрным чаем в 3 раза больше, чем пакетиков с зелёным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный из этой коробки пакетик окажется пакетиком с зелёным чаем.

30. В коробке вперемешку лежат чайные пакетики с чёрным и зелёным чаем, одинаковые на вид, причём пакетиков с чёрным чаем в 4 раза больше, чем пакетиков с зелёным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный из этой коробки пакетик окажется пакетиком с зелёным чаем. 0,2

31. На птицеферме есть только куры и гуси, причём кур в 19 раз больше, чем гусей. Найдите вероятность того, что случайно выбранная на этой ферме птица окажется гусем.

32. На птицеферме есть только куры и гуси, причём кур в 7 раз больше, чем гусей. Найдите вероятность того, что случайно выбранная на этой ферме птица окажется гусем.

33. Из 600 луковиц тюльпанов в среднем 48 не прорастают. Какова вероятность того, что случайно выбранная и посаженная луковица прорастёт?

34. Из 300 саженцев крыжовника в среднем 36 не приживаются. Какова вероятность того, что случайно выбранный саженец крыжовника приживётся?

35. На экзамене будет 25 билетов, Коля не выучил 1 из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет.

36. На экзамене будет 20 билетов, Слава не выучил 4 из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет.

37. В среднем из 500 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

38. В среднем из 1500 садовых насосов, поступивших в продажу, 3 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

39. Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 50 докладов: первые два дня – по 12 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора Ф. Порядок докладов определяется случайным образом. Какова вероятность того, что доклад профессора Ф. окажется запланированным на последний день конференции?

40. Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 60 докладов: первые два дня – по 12 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется случайным образом. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

41. Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений – по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 32 выступления, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

42. Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 50 выступлений – по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано

14 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

43. На олимпиаде по обществознанию участников рассаживают по трём аудиториям. В первых двух аудиториях сажают по 140 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчёте выяснилось, что всего было 350 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

44. На олимпиаде по химии участников рассаживают по трём аудиториям. В первых двух аудиториях сажают по 140 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчёте выяснилось, что всего было 400 участников. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

45. В группе туристов 4 человека. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

46. В группе туристов 10 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

47. В чемпионате мира участвуют 8 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по две команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

48. В чемпионате мира участвуют 10 команд. С помощью жребия их нужно разделить на пять групп по две команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда Канады окажется в первой группе?

49. Найдите вероятность того, что случайно выбранное трёхзначное число делится на 33.

50. Найдите вероятность того, что случайно выбранное трёхзначное число делится на 49.

II. Статистическое определение вероятности.

Пример 1. В среднем из 1000 аккумуляторов, поступивших в продажу, 6 неисправны. Найдите вероятность того, что один купленный аккумулятор окажется исправным.

Решение. Испытание – выбор аккумулятора. Элементарный исход — случайно выбранный аккумулятор. Поэтому $n=1000$. Событию $A = \{\text{аккумулятор исправен}\}$ благоприятствуют $m=1000-6 = 994$ исхода. Поэтому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{994}{1000} = 0,994.$$

Ответ: 0,994.

Задачи для самостоятельного решения

1. В среднем из 200 садовых насосов, поступивших в продажу, 20 подтекает. Найдите вероятность того, что случайно выбранный для контроля насос подтекает.

2. В среднем из 300 садовых насосов, поступивших в продажу, 45 подтекает. Найдите вероятность того, что случайно выбранный для контроля насос подтекает.

3. Фабрика выпускает сумки. В среднем из 120 сумок 6 сумок имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная сумка окажется с дефектом.

4. Фабрика выпускает сумки. В среднем из 150 сумок 3 сумки имеют скрытый дефект. Найдите вероятность того, что случайно выбранная сумка окажется с дефектом.

5. Из 600 луковиц тюльпанов в среднем 48 не прорастают. Какова вероятность того, что случайно выбранная и посаженная луковица прорастёт?

6. Из 300 саженцев крыжовника в среднем 36 не приживаются. Какова вероятность того, что случайно выбранный саженец крыжовника приживётся?

7. В среднем из 500 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

8. В среднем из 1500 садовых насосов, поступивших в продажу, 3 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

9. В среднем из 200 садовых насосов, поступивших в продажу, 20 подтекает. Найдите вероятность того, что случайно выбранный для контроля насос подтекает.

10. В среднем из 300 садовых насосов, поступивших в продажу, 45 подтекает. Найдите вероятность того, что случайно выбранный для контроля насос подтекает.

III. Геометрическое определение вероятности.

Пример 1. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 6, но не дойдя до отметки 9.

Решение. Часовая стрелка в работающих часах описывает окружность в 360° и при поломке часов может остановиться на любой точке окружности. Таких точек бесконечно много, поэтому применим геометрическую модель вероятности. Здесь достоверным событием является окружность, отвечающая углу 360° . Определим событие A – «часовая стрелка при поломке часов достигла отметки 6, но не дошла до отметки 9». Дуга окружности

между отметками 6 и 9 благоприятствует событию A и отвечает углу 90° .

Значит, $P(A) = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

Пример 2. Из квадрата со стороной 4 наугад выбирается точка. Какова вероятность события A – «точка находится на расстоянии не более чем 1 от центра квадрата»? (значение числа π взять равным 3)

Решение. Испытание: выбор точки внутри квадрата. Здесь возможным

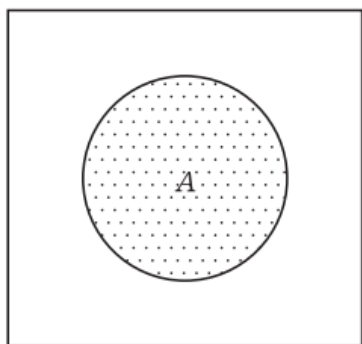


Рис. 1

исходом является любая точка квадрата. Площадь квадрата равна 16. Благоприятным исходом события A является точка круга с радиусом 1 и с центром, совпадающим с центром квадрата. Площадь этого круга равна $\pi=3$. Рисунок 1 содержит квадрат и благоприятное событие A .

Теперь можно вычислить вероятность заданного

события A по формуле $P(A) = \frac{3}{16} = 0,1875$.

Ответ: 0,1875.

Задачи для самостоятельного решения

1. Метровую ленту случайным образом разрезают ножницами. Найти вероятность того, что длина обрезка составит не менее 80 см.

2. В круге радиуса 10 см находится прямоугольный треугольник с катетами 12 и 7 см. В круг наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что она не попадёт в данный треугольник. Примите $\pi=3$.

3. Вернувшись из отпуска, Иван Иванович обнаружил, что настенные часы давно остановились. Найдите вероятность того, что время, которое показывают стоящие часы, отличается от действительного времени не больше чем на 30 минут. Ответ округлите до сотых.

4. Внутри прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 4, 6, 10 см, наудачу выбирается точка М. Какова вероятность того, что она окажется внутри данного куба, ребро которого 3 см.

5. Точку наудачу бросают в квадрат, сторона которого равна 1. Спрашивается, какова вероятность события, которое состоит в том, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата не больше чем 0,25?

6. Из круга с центром в начале координат (0;0) наугад выбирается точка. Какова вероятность события «выбранная точка лежит в 1-й четверти декартовой системы координат»?

7. Автобус приходит на остановку каждые 15 минут. Пассажир приходит в случайный момент. Какова вероятность, что он будет ждать не более 5 минут? Ответ округлите до сотых.

8. В прямоугольнике со сторонами 3см и 4 см случайным образом выбирается точка. Какова вероятность, что она окажется внутри треугольника с вершинами в трёх углах прямоугольника?

9. Стрелка часов сломалась и остановилась в случайном положении. Какова вероятность, что она указывает на интервал между 2 и 6 часами?

IV. Противоположные события.

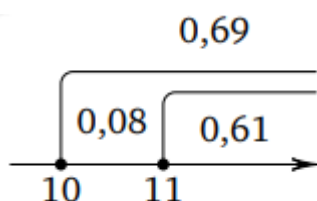
Пример 1. Термометр измеряет температуру в жилом помещении. Известно, что вероятность события «температура не ниже 18°C », равна 0,82. Найдите вероятность того, что термометр покажет температуру ниже 18°C .

Решение. Испытание: измерение температуры в жилом помещении. Событие $\bar{A}$ - «температура ниже 18°C » является противоположным событию A - «температура не ниже 18°C ». Известно, что сумма вероятностей противоположных событий равна 1. Следовательно, искомая вероятность равна $\bar{A} = 1 - 0,82 = 0,18$.

Ответ: 0,18.

Пример 2. Вероятность того, что на тестировании по физике студент П. верно решит не менее 11 задач, равна 0,61. Вероятность того, что П. верно решит не менее 10 задач, равна 0,69. Найдите вероятность того, что П. верно решит ровно 10 задач.

Решение. Обозначим число решённых задач через X . По условию,



$P(X \geq 11) = 0,61$, $P(X \geq 10) = 0,69$. Найдем $P(X = 10)$.

События $P(X \geq 11)$ и $P(X = 10)$ несовместны, поэтому

$P(X = 10) + P(X \geq 11) = P(X \geq 10)$. Значит,

$P(X = 10) = P(X \geq 10) - P(X \geq 11) = 0,69 - 0,61 = 0,08$. Рисунок

иллюстрирует решение.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вероятность того, что стекло мобильного телефона разобьётся при падении на твёрдую поверхность, равна 0,88. Найдите вероятность того, что при падении на твёрдую поверхность стекло мобильного телефона не разобьётся.

2. Вероятность того, что стекло мобильного телефона разобьётся при падении на твёрдую поверхность, равна 0,74. Найдите вероятность того, что при падении на твёрдую поверхность стекло мобильного телефона не разобьётся.

3. Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо или вовсе не пишет, равна 0,21. Покупатель, не глядя, берёт одну шариковую ручку из коробки. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

4. Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо или вовсе не пишет, равна 0,17. Покупатель не глядя берёт одну шариковую ручку из коробки. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

V. Сумма и произведение событий.

Пример 1. На экзамене по геометрии школьнику достаётся одна задача из сборника. Вероятность того, что эта задача по теме «Углы», равна 0,1. Вероятность того, что это окажется задача по теме «Параллелограмм», равна 0,6. В сборнике нет задач, которые одновременно относятся к этим двум темам. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется задача по одной из этих двух тем.

Решение. Испытание: выбор задачи из сборника на экзамене по геометрии. Рассмотрим события: A – «школьнику на экзамене достанется задача по теме «Параллелограмм» или по теме «Углы», B – «школьнику на экзамене достанется задача по теме «Параллелограмм», C – «школьнику на экзамене достанется задача по теме «Углы». По определению суммы событий, $A=B+C$. События B и C по условию являются несовместными. Значит, по теореме о вероятности суммы событий, получим $P(A)=P(B+C)=P(B)+P(C)=0,1+0,6=0,7$.

Ответ: 0,7

Пример 2. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение. Рассмотрим событие A – «хотя бы одна лампа в течение года не перегорит». Для него событие B – «в течение года перегорят обе лампы» является противоположным. Найдём его вероятность. Событие B является произведением двух событий: C – «в течение года перегорит 1-я лампа» и M – «в течение года перегорит 2-я лампа». Эти события независимы. Значит, по теореме о вероятности произведения событий, $P(B)=P(C \cdot M)=P(C) \cdot P(M)=0,3 \cdot 0,3=0,09$. Тогда, $P(A)=1-P(B)=1-0,09=0,91$.

Ответ: 0,91.

Задачи для самостоятельного решения

1. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью $0,25$ независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что оба автомата неисправны.

2. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью $0,02$ независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что оба автомата неисправны.

3. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна $0,4$. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся неисправными.

4. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна $0,25$. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся неисправными.

5. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна $0,3$. Найдите вероятность того, что в течение года обе лампы перегорят.

6. Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна $0,15$. Найдите вероятность того, что в течение года обе лампы перегорят.

7. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна $0,35$. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна $0,25$. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

8. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна $0,1$. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна $0,35$. Вопросов, которые одновременно относятся к

этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

9. В кафе каждому посетителю приносят бесплатно один комплимент от заведения, которого нет в меню. Вероятность того, что в качестве комплимента от заведения принесут миндальное печенье, равна 0,1. Вероятность того, что в качестве комплимента принесут рогалик, равна 0,35. Найдите вероятность того, что в качестве комплимента от заведения посетителю И. принесут одно из двух: миндальное печенье или рогалик. 0,45

10. В кафе каждому посетителю приносят бесплатно один комплимент от заведения, которого нет в меню. Вероятность того, что в качестве комплимента от заведения принесут тарталетку с сыром, равна 0,25. Вероятность того, что в качестве комплимента принесут мороженое, равна 0,2. Найдите вероятность того, что в качестве комплимента от заведения посетителю И. принесут одно из двух: тарталетку с сыром или мороженое.

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

I. Классическое, статистическое, геометрическое определения вероятности.

Пример 1. В классе 21 человек, среди них близнецы – Даша и Маша. Класс случайным образом делят на три группы по 7 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Даша и Маша окажутся в разных группах.

Решение. Испытание — распределение 21 человека по трем группам. Пусть событие A – «Даша и Маша окажутся в разных группах». Пусть Даша уже оказалась в какой-то группе. Тогда в двух других группах есть 14 мест, которые может занять Маша. Общее число мест, которые может занять Маша равно $21-1 = 20$ (так как Даша уже заняла одно место). Поэтому для события A 14 благоприятствующих исходов испытания из 20 возможных. Все исходы равновозможны, попарно несовместны и образуют полную группу. Тогда, по классическому определению вероятности, $P(A) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0,7$.

Пример 2. Какова вероятность того, что случайно выбранное трехзначное число делится на 8? Ответ округлите до сотых.

Решение. Испытание – выбор трехзначного числа. Событие A – «выбранное трехзначное число делится на 8». Элементарными исходами испытания являются выбранные числа (одно в каждом исходе). Эти события равновозможны, попарно несовместны и образуют полную группу. Общее число элементарных событий n равно числу трехзначных чисел. Их количество равно $n=999-100+1=900$. Найдём количество трёхзначных чисел, которые делятся на 8. Эти числа образуют арифметическую прогрессию с

$$a_1 = 104, \quad d = 8.$$

Решим

неравенство

$$a_m < 1000, \quad 104 + 8(m-1) < 1000, \quad 104 + 8m - 8 < 1000, \quad m < 113. \quad \text{Значит,}$$

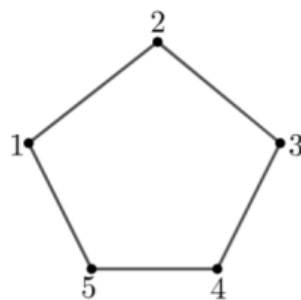
$m = 12$ - число благоприятствующих событию A исходов испытания. Тогда,

по классическому определению вероятности, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{900} \approx 0,012$.

Ответ: 0,012.

Пример 3. Дан правильный пятиугольник. Учитель предлагает ученику выбрать наугад две вершины. Найдите вероятность того, что выбранные вершины принадлежат одной стороне пятиугольника.

Решение. Испытание – выбор двух вершин пятиугольника. A – «выбранные вершины принадлежат одной стороне пятиугольника». Элементарными исходами испытания являются события «выбраны некоторые две вершины пятиугольника». Эти события равновозможны, попарно несовместны и образуют полную группу. Общее число элементарных исходов n равно числу способов выбрать две вершины пятиугольника из пяти. Посчитаем их число. Пронумеруем углы пятиугольника цифрами от 1 до 5. Ученик может выбрать две вершины из пяти 10 возможными способами: 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 1 – 5, 2 – 3, 2 – 4, 2 – 5, 3 – 4, 3 – 5, 4 – 5. Выигрышными для ученика являются 5 способов: 1 – 2, 2 – 3, 3 – 4, 4 – 5, 5 – 1. Таким образом 5 благоприятствующих событию A исходов из 10 возможных. Тогда, по классическому определению вероятности,



$$P(A) = \frac{5}{10} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

Пример 4. Фабрика делает женские шляпки. В среднем на 100 качественных шляпок 8 шляпок имеют скрытый дефект (не обнаруженный при контроле качества продукции). Найдите вероятность того, что случайно выбранная шляпка этой фабрики не будет иметь дефектов. Ответ округлите до сотых.

Решение. Испытание – выбор шляпки. A – «выбранная шляпка не имеет дефектов». Элементарными исходами испытания являются события «выбрана некоторая шляпка». Эти события равновозможны, попарно несовместны и образуют полную группу. Общее число элементарных исходов равно $100+8=108$. Для события «случайно выбранная шляпка не

имеет дефектов» 100 благоприятных. Все исходы равновероятны. Таким образом, вероятность того, что случайно выбранная шляпа не имеет дефектов

равна $P(A) = \frac{100}{108} \approx 0,93$.

Ответ: 0,93.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В кармане у Миши было четыре конфеты — «Грильяж», «Белочка», «Коровка» и «Ласточка», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Миша случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Грильяж».

2. Вася, Петя, Коля и Лёша бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

3. Во время психологического теста психолог предлагает каждому из двух испытуемых А и Б выбрать одну из трёх цифр: 1, 2 и 3. Считая, что все комбинации равновозможны, найдите вероятность того, что А и Б выбрали разные цифры. Ответ округлите до сотых.

4. На тарелке 16 пирожков: 7 с рыбой, 5 с вареньем и 4 с вишней. Юля наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

5. В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по теме «Ботаника». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Ботаника».

6. В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 10 черных, 2 желтых и 8 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зеленое такси.

7. В фирме такси в наличии 64 легковых автомобиля; 34 из них черные с желтыми надписями на бортах, остальные желтые с черными надписями.

Найдите вероятность того, что на случайный вызов придет машина желтого цвета с черными надписями. Ответ округлите до тысячных.

8. На экзамен вынесено 60 вопросов, Андрей не выучил 3 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос.

9. В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 10 из них встречается вопрос по теме «Неравенства». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по теме «Неравенства».

10. В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

11. Дежурные по классу Алексей, Иван, Татьяна и Ольга бросают жребий кому стирать с доски. Найдите вероятность того, что стирать с доски придётся одной из девочек.

12. Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 спортсменов из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

13. Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 шахматистов, среди которых 19 спортсменов из России, в том числе Константин Воробьев. Найдите вероятность того, что в первом туре Константин Воробьев будет играть с каким-либо шахматистом из России. Гарантийный ремонт и частота рождения

14. В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 4 из Финляндии, 7 из Дании, 9 из Швеции и 5 из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите

вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Швеции.

15. В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

16. В чемпионате по прыжкам с шестом участвуют 9 спортсменов из Китая, 6 спортсменов из США и 5 спортсменов из Канады. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступивший последним, окажется из Китая.

17. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая.

18. В соревновании по прыжкам в высоту участвуют 9 спортсменов из Франции, 7 из Италии, 8 из Австрии, 6 из Швейцарии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий вторым, окажется из Франции.

19. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов: первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвёртым и пятым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

20. Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 50 выступлений: по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 6 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова

вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

21. На конференцию приехали учёные из трёх стран: 3 из Норвегии, 3 из России и 4 из Испании. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад учёного из России.

22. Профессиональный конкурс парикмахеров проводится в три дня. В конкурсе участвует по одному мастеру из 20 стран. Порядок выступления мастеров определяется жеребьёвкой: в первые два дня по шесть выступлений, остальные — в третий день. Найдите вероятность того, что выступление мастера из России запланировано на первый или на третий день.

23. В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

24. В группе туристов 24 человека. С помощью жребия они выбирают трех человек, которые должны идти в село за продуктами. Турист А хотел бы сходить в магазин, но он подчиняется жребию. Какова вероятность того, что А пойдёт в магазин?

25. В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село за продуктами. Турист А хотел бы сходить в магазин, но он подчиняется жребию. Какова вероятность того, что А пойдёт в магазин?

26. В группе туристов 30 человек. Их вертолётom доставляют в труднодоступный район, перевозя по 6 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист П. полетит первым рейсом вертолётa.

27. Проводится жеребьёвка Лиги Чемпионов. На первом этапе жеребьёвки восемь команд, среди которых команда «Барселона»,

распределились случайным образом по восьми игровым группам — по одной команде в группу. Затем по этим же группам случайным образом распределяются еще восемь команд, среди которых команда «Зенит». Найдите вероятность того, что команды «Барселона» и «Зенит» окажутся в одной игровой группе.

28. Грамоты призеров математического конкурса хранятся в трех коробках — по 400 грамот в первых двух, а остальные грамоты в третьей. Участник Б приходит за своей грамотой. Найдите вероятность того, что его грамота найдется в третьей коробке, если всего в конкурсе 953 призера. Ответ округлите до сотых.

29. Грамоты призеров математического конкурса хранятся в трех коробках — по 400 дипломов в первых двух и 217 в третьей. Участник С приходит за своей грамотой. Найдите вероятность того, что его грамота найдется в первой или второй коробке. Ответ округлите до сотых.

30. На борту самолета 54 места у прохода, 6 мест за запасным выходом, остальные 120 мест неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир И высокий. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру И достанется удобное место. Ответ округлите до сотых.

31. На борту самолета 12 мест рядом с запасными выходами и 18 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир В высокий. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В достанется удобное место, если всего в самолете 300 мест.

32. В плацкартном вагоне 54 места. Чётные места - верхние, нечетные - нижние. Места с 37 по 54-боковые. Пассажир Р покупает билет. При покупке билета место определяется случайно. Найдите вероятность того, что пассажиру Р достанется нижнее не боковое место. Ответ округлите до сотых.

33. На олимпиаде по русскому языку 250 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 120 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

34. На олимпиаде в вузе участников рассаживают по трем аудиториям. В первых двух по 120 человек, оставшихся проводят в запасную аудиторию в другом корпусе. При подсчете выяснилось, что всего было 252 участника. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории. Ответ округлите до сотых.

35. В финале телевикторины участвуют четыре игрока, среди которых Иван Петрович. Но главных призов только два, и они будут разыграны случайным образом с помощью компьютера. Какова вероятность того, что Ивану Петровичу достанется один из главных призов?

36. Учитель нарисовал на доске квадрат $ABCD$ и предлагает учащемуся выбрать две вершины. Сколько элементарных событий в этом опыте? Примечание. В данной задаче мы считаем, что пара вершин $A; B$ и пара $B; A$ – это одна и та же пара и ее мы будем считать один раз.

37. Учитель нарисовал на доске квадрат $ABCD$ и случайно выбирает две вершины. Какова вероятность того, что выбранные вершины соединяются диагональю? Ответ округлите до сотых.

38. Дан правильный пятиугольник. Учитель предлагает ученику выбрать наугад две вершины. Найдите вероятность того, что выбранные вершины принадлежат одной стороне пятиугольника.

39. Игрок зажал в кулаке носовой платок так, что между пальцами торчат только четыре уголка. Второй игрок наудачу выбирает два уголка. Он выигрывает, если взял платок за диагональ, и проигрывает в противном случае. Найдите вероятность выигрыша второго игрока. Ответ округлите до сотых.

40. Небольшие холодильники упакованы в кубические картонные коробки. При хранении холодильник должен стоять дном вниз. На складе одну такую коробку положили случайным образом, не обращая внимания на положение холодильника. Найдите вероятность того, что холодильник хранится неправильно. Ответ округлите до сотых.

41. Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

42. Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнет игру с мячом. Команда «Статор» по очереди играет с командами «Ротор», «Мотор» и «Стартер». Найдите вероятность того, что «Статор» будет начинать только первую и третью игру.

43. 1 апреля на запись в первый класс независимо друг от друга пришло 3 будущих первоклассника. Найдите вероятность того, что среди них было ровно две девочки и один мальчик. *Считайте, что пришедший ребенок с равной вероятностью может оказаться мальчиком или девочкой.

44. Андрей, Борис и Владислав по очереди в случайном порядке подходят к прилавку киоска. Какова вероятность того, что Борис подойдёт позже Андрея?

45. На трех крючках в ряд висели три полотенца - красное, синее и зеленое. Их отправили в стирку, а потом снова повесили на те же крючки в случайном порядке. Найдите вероятность того, что теперь полотенца висят не в том порядке, в каком висели раньше. Ответ округлите до сотых.

46. На фестивале скрипичной музыки выступают 20 исполнителей, по одному от одной европейской страны. Порядок, в котором они выступают, определяется жребием. Какова вероятность того, что представитель Голландии будет выступать после представителя Ирландии, но перед скрипачом из Швеции? Ответ округлите до сотых.

47. На рок-фестивале выступают группы – по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

48. На фестивале органной музыки выступают 15 исполнителей, по одному от одной европейской страны. Порядок, в котором они выступают, определяется жребием. Какова вероятность того, что представитель Венгрии будет выступать после представителя Сербии, но перед музыкантом из Австрии? Ответ округлите до сотых.

49. На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра окажется чётной?

50. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 10 до 19 делится на три?

51. Какова вероятность того, что случайно выбранное двузначное число делится на 5?

52. Какова вероятность того, что случайно выбранное трехзначное число делится на 4?

53. В коробке 5 шариков, пронумерованных числами от 1 до 5. Один за другим по очереди вынимают 4 шарика и перемножают числа на них. Какова вероятность того, что произведение делится на 5?

54. В коробке 5 шариков, пронумерованных цифрами от 1 до 5. Один за другим по очереди вынимают 4 шарика, записывая каждый раз цифру. Получается четырёхзначное число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

55. Какова вероятность того, что последние две цифры случайного телефонного номера различны?

56. Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя чётными цифрами?

57. Найдите вероятность того, что в случайном семизначном телефонном номере последняя цифра не больше 3, а две цифры перед ней не больше 2.

58. Найдите вероятность того, что произведение трех последних цифр случайно выбранного телефонного номера чётно.

59. Найдите вероятность того, что произведение трех последних цифр случайного телефонного номера нечётно.

60. Иван Иванович регистрирует автомобиль в ГИБДД и получает новый трехзначный номер. Все три цифры нового номера случайны (номер 000 не разрешен). Найдите вероятность того, что при случайном выборе в новом номере все три цифры будут одинаковы. Ответ округлите до тысячных.

61. Иван Петрович регистрирует автомобиль в ГИБДД и получает новый номер. Все три цифры нового номера случайны, но номер 000 не разрешен. Раньше номер автомобиля у Ивана Петровича был 769. Найдите вероятность того, что при случайном выборе нового номера он будет записан теми же тремя цифрами (в любом порядке). Ответ округлите до тысячных.

62. Какова вероятность того, что случайно выбранное трехзначное число делится на 8? Ответ округлите до сотых.

63. Правильную игральную кость бросают три раза. Найдите вероятность того, что тройка выпала хотя бы один раз. Ответ округлите до сотых.

64. Кубик бросают четыре раза. Какова вероятность того, что шестерка не выпадет ни разу? Ответ округлите до сотых.

65. У Вити в копилке лежит 12 рублёвых, 6 двухрублёвых, 4 пятирублёвых и 3 десятирублёвых монеты. Витя наугад достаёт из копилки одну монету. Найдите вероятность того, что оставшаяся в копилке сумма составит более 70 рублей.

66. Андрей и Пантелей выбирают по одному натуральному числу от 1 до 9 независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что сумма этих чисел делится на 4. Ответ округлите до сотых.

67. Три друга А, Б, В летят на самолёте. При регистрации им достались три кресла подряд, и друзья заняли их в случайном порядке. Найдите вероятность того, что А сидит рядом с Б. Ответ округлите до сотых.

68. Четыре друга А, Б, В, Г заселяются в гостиницу в два двухместных номера. Администратор гостиницы распределяет их по номерам случайным образом. Найдите вероятность того, что А и Б оказались в одном номере. Ответ округлите до сотых.

69. В случайном эксперименте игральный кубик бросают один раз. Найдите вероятность того, что выпадет число, меньшее чем 4.

70. В случайном эксперименте игральный кубик бросают один раз. Найдите вероятность того, что выпадет чётное число.

71. Игральный кубик бросают один раз. Найдите вероятность того, что выпадет число, отличающееся от числа 3 на единицу. Ответ округлите до сотых.

72. В случайном эксперименте игральный кубик бросают один раз. Найдите вероятность того, что выпавшее число является делителем числа 6. Ответ округлите до сотых.

73. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что первый раз выпадет число 6. Ответ округлите до сотых.

74. В случайном эксперименте игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствует событию $A = \{\text{сумма выпавших очков четна}\}$?

75. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию $A = \{\text{сумма очков равна 5}\}$?

76. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность события $B = \{\text{сумма очков равна 6}\}$? Ответ округлите до сотых.

77. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков чётна.

78. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков будет меньше чем 4. Ответ округлите до тысячных.

79. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков равно 12. Ответ округлите до сотых.

80. В случайном эксперименте игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

81. Игральный кубик бросают дважды. Найдите число элементарных исходов, благоприятствующих событию $B = \{\text{произведение выпавших очков больше или равно } 10\}$.

82. Бросают два игровых кубика. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков больше или равно 10. Ответ округлите до сотых.

83. В случайном эксперименте игральный кубик бросают два раза. Найдите вероятность того, что модуль разности выпавших очков будет меньше чем 2. Ответ округлите до сотых.

84. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что выпавшие числа будут отличаться на 3. Ответ округлите до сотых.

85. Симметричную монету бросают дважды. Сколько элементарных событий благоприятствует выпадению хотя бы одного орла?

86. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что наступит элементарный исход РО (в первый раз выпадет решка, во второй – орёл).

87. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что наступит исход ОР (в первый раз выпадет орёл, во второй – решка)

88. Симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что выпадет ровно одна решка.

89. Монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что выпадет хотя бы одна решка.

90. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз.

91. Монету бросают три раза. Найдите вероятность элементарного исхода ОРО.

92. Монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что наступит элементарный исход РРО.

93. Монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз.

94. Монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что решка не выпадет ни разу.

95. Монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что орёл выпадет более одного раза.

96. Монету бросают три раза. Какова вероятность того, что результаты двух первых бросков будут одинаковы?

97. Монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что результаты первого и последнего броска различны.

98. Монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что решек выпадет больше, чем орлов.

99. Монету бросают четыре раза. Сколько элементарных событий в этом опыте?

100. Монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно три раза.

101. Монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что решка выпадет больше двух раз.

102. Монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что решка выпадала больше раз, чем орел.

103. Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000

проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

104. Вероятность того, что новый компьютер в течение года потребует гарантийного ремонта, равна 0,05. В некотором городе из 500 проданных компьютеров в течение года в гарантийную мастерскую поступило 28 штук. На сколько в этом городе отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности?

105. В некотором городе из 5000 появившихся на свет младенцев оказалось 2512 мальчиков. Найдите частоту рождения девочек в этом городе. Результат округлите до тысячных.

106. В некотором городе из 40000 появившихся на свет младенцев оказалось 19 833 девочки. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе. Результат округлите до тысячных.

107. В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

108. В среднем из 1000 авторучек, поступивших в продажу, 15 пишут плохо или не пишут. Найдите вероятность того, что одна случайно выбранная авторучка пишет хорошо.

109. Фабрика выпускает сумки. В среднем 8 сумок из 100 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

110. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 92 качественных сумки приходится 8 сумок, имеющих скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что выбранная в магазине сумка окажется с дефектами.

111. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится три сумки со скрытыми дефектами. Найдите вероятность, того, что случайно выбранная в магазине сумка окажется качественной. Ответ округлите до сотых.

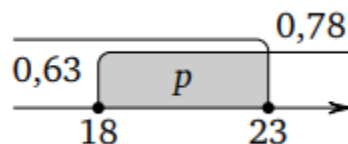
112. Фабрика шьет пиджаки. В среднем на 100 качественных пиджаков 9 пиджаков имеют скрытый дефект (не обнаруженный при контроле). Найдите вероятность того, что случайно выбранный в магазине пиджак этой фабрики не будет иметь дефектов. Ответ округлите до сотых.

II. Полная группа событий. Сумма и произведение событий.

Пример 1. На экзамене по геометрии школьнику достается один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение. Испытание: выбор вопроса из списка на экзамене. Определим события: A – «вопрос на тему «Вписанная окружность», B – «вопрос на тему Параллелограмм». События A и B несовместны, так как по условию в списке нет вопросов, относящихся к этим двум темам одновременно. Событие C – «вопрос по одной из этих двух тем» является суммой событий A и B : $C = A + B$. Применим теорему о вероятности суммы несовместных событий $P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) = 0,2 + 0,15 = 0,35$.

Ответ: 0,35.



Пример 2. Термометр измеряет комнатную температуру. Вероятность того, что температура окажется не ниже 18°C , равна 0,78. Вероятность того, что температура не выше 23°C , равна 0,63. Найдите вероятность того, что температура окажется в пределах от 18°C до 23°C .

Решение. Обозначим температуру буквой T и изобразим промежутками на числовой прямой указанные события и их вероятности.

Нужно найти вероятность $P(18^{\circ}C \leq T \leq 23^{\circ}C)$, которое изображается закрашенным промежутком. Пусть эта вероятность равна p .

События $T \leq 18^{\circ}C$, $18^{\circ}C \leq T \leq 23^{\circ}C$, $T \geq 23^{\circ}C$ образуют полную группу, поэтому их суммарная вероятность равна 1: $(0,63-p)+p+(0,78-p)=1$. Решив уравнение, получаем $p = 0,63+0,78-1 = 0,41$.

Пример 3. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Определим события A – «кофе закончится в первом автомате», B – «кофе закончится во втором автомате», C – «кофе останется в обоих автоматах». По условию задачи $P(A)=P(B)=0,3$ и $P(A \cdot B)=0,12$. Так как $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cdot B)$, то события A и B зависимы. Найдём вероятность противоположного события $\bar{C}$ – «кофе закончится хотя бы в одном из автоматов». По теореме о вероятности суммы событий найдём вероятность события $\bar{C} = A+B$ – «кофе закончится хотя бы в одном из автоматов». Так как события A и B совместны, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B) = 0,3+0,3-0,12 = 0,48$. Следовательно, вероятность события C $P(C)=1-0,48 = 0,52$.
Ответ: 0,52.

Пример 4. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два раза промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение. В этой задаче предполагается, что результат каждого следующего выстрела не зависит от предыдущих. Поэтому события A_1 – «попал при первом выстреле», A_2 – «попал при втором выстреле» и т. д. независимы. Вероятность каждого попадания равна 0,8. Так как события A_i – «попадание при i -ом выстреле» и $\bar{A}_i$ – «промах при i -ом выстреле»

противоположные, то вероятность попадания $P(A_i) = 0,8$, а каждого промаха $P(\bar{A}_i) = 1 - 0,8 = 0,2$. Событие B – «биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два раза промахнулся» $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \bar{A}_4 \cdot \bar{A}_5$. События $A_1, A_2, A_3, \bar{A}_4, \bar{A}_5$ независимы. По теореме о вероятности произведения событий получим

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \bar{A}_4 \cdot \bar{A}_5) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(\bar{A}_4) \cdot P(\bar{A}_5) \\ &= 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,02048 \approx 0,02. \end{aligned}$$

Ответ: 0,02.

Пример 5. Автоматическая линия разливает питьевую воду в бутылки по 6 л. В 97% случаев объем воды в бутылке отличается от нормы не больше чем на 0,2 л. Какова вероятность того, что в случайно выбранной бутылке объем воды будет меньше чем 5,8 л или больше чем 6,2 л?

Решение. Рассмотрим событие A – «объем бутылки лежит в пределах в пределах от 5,8 до 6,2 л», событие B – «объем бутылки не лежит в пределах от 5,8 до 6,2 л». Эти события являются противоположными. Из условия известно, что $P(A) = 0,97$. По теореме о сумме вероятностей противоположных событий, $P(A) + P(B) = 1$. Значит, $P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,97 = 0,03$.

Ответ: 0,03.

Пример 6. В урне 10 шаров, из них 4 черных шара и 6 белых. Наугад из урны выбирают два шара последовательно друг за другом. Выбранные шары обратно в урну не кладутся. Найдите вероятность того, что из урны сначала был вынут белый, а затем черный шар.

Решение. Рассмотрим два события A – «из урны вынут белый шар», B – «из урны вынут черный шар». Событие C – «из урны сначала был вынут белый, а затем черный шар». Так как сначала из урны вынимается первый шар (не кладется обратно), а затем второй, то события A и B зависимы. Следовательно, вероятность события C будет определяться формулой $P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$. По классическому определению вероятности,

$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Условная вероятность события В (при условии, что А произошло) равна $P(B|A) = \frac{4}{9}$. Тогда $P(C) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15} \approx 0,27$.
Ответ: 0,27.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В ящике четыре красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

2. В коробке 6 красных и 4 синих карандашей. По очереди из коробки извлекают два случайных карандаша. Найдите вероятность того, что сначала появится красный, а затем синий карандаш. Ответ округлите до сотых.

3. В коробке 6 красных и 4 синих карандашей. По очереди из коробки извлекают два случайных карандаша. Найдите вероятность того, что в итоге извлекут красный и синий карандаши. Ответ округлите до сотых.

4. В ящике 7 красных и 9 синих фломастеров. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первые три извлечённых фломастера будут красными?

5. В конкурсе песни участвуют 4 девушки и 6 юношей. Порядок выступлений определяется жребием. Какова вероятность того, что первый раз юноша будет выступать третьим по счёту?

6. В тёмном погребе хранится 7 банок вишнёвого варенья, 5 банок клубничного и 3 банки сливового. Из погреба взяли две случайные банки. Какова вероятность того, что в одной из них вишнёвое варенье, а в другой сливовое?

7. В коробке 10 синих, 9 красных и 6 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

8. На конференцию приехали учёные из трёх стран: 9 из Аргентины, 3 из Венесуэлы и 4 из Доминиканы. В первый день конференции

запланированы два доклада, а остальные - в следующие два дня. Порядок докладов определяется по жребию. Какова вероятность того, что в первый день хотя бы один докладчик окажется из Доминиканы?

9. В поход отправились девятиклассники: 11 учеников из 9 «А» класса, 6 учеников из 9 «Б» и 8 учеников из 9 «В». В первый день из них по жребию выбрали двух дежурных по лагерю. Какова вероятность того, что дежурные по лагерю окажутся из одного класса? Ответ округлите до сотых.

10. На кассе универсама продаются леденцы. В какой-то момент в коробке осталось 10 красных, 9 синих и 6 зелёных леденцов. Таня, Ваня и Маня по очереди именно в таком порядке покупают по одному леденцу. Кассир не глядя достаёт леденцы из коробки. Найдите вероятность того, что Таня и Маня получают синие леденцы, а Ваня – красный. Ответ округлите до сотых.

11. Чтобы поступить в институт на специальность «Международное право», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 60 баллов по каждому из трех предметов – математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Социология», нужно набрать не менее 60 баллов по каждому из трех предметов – математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент А получит не менее 60 баллов по математике, равна 0,8, по русскому языку – 0,9, по иностранному языку – 0,8 и по обществознанию – 0,9. Найдите вероятность того, что А поступит хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

12. Чтобы поступить на специальность «Международные отношения», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 68 баллов по каждому из трёх предметов - математике, русскому языку и иностранному языку. Чтобы поступить на специальность «Таможенное дело», нужно набрать не менее 68 баллов по каждому из трёх предметов - математике, русскому языку и обществознанию. Вероятность того, что абитуриент Р. получит не менее 68 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку - 0,8, по иностранному

языку - 0,5 и по обществузнанию - 0,7. Найдите вероятность того, что Р. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

13. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

14. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 6 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 5 очков, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

15. Телефон передаёт SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,4. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

16. Телефон передаёт СМС-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,2. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток. 0,36

17. Телефон передаёт СМС-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,3. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше трёх попыток.

18. В ветеринарной лаборатории проводятся анализы на пироплазмоз. Если анализ не выявляет заболевания, говорят, что результат анализа отрицательный, в противном случае — что результат положительный. Если анализ отрицательный, врач назначает повторный анализ. Третий анализ не назначается. Вероятность ложного отрицательного анализа у больной пироплазмозом собаки равна 0,3. Найдите вероятность того, что с помощью такой процедуры у больной пироплазмозом собаки удастся выявить это заболевание.

19. В ветеринарной лаборатории проводятся анализы на пироплазмоз. Если анализ не выявляет заболевания, говорят, что результат анализа отрицательный, в противном случае — что результат положительный. Если анализ отрицательный, врач назначает повторный анализ. Третий анализ не назначается. Вероятность ложного положительного результата у здоровой собаки равна 0,005. Найдите вероятность того, что с помощью такой процедуры у здоровой собаки будет ошибочно диагностирован пироплазмоз. Результат округлите до сотых.

20. В одном ресторане в городе Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в «Шеш-беш»: гость бросает одновременно две игральные кости. Нужно выбросить комбинацию 5 и 6 очков. У гостя две попытки. И если это удалось, то гость получает чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность того, что гость выиграет? Ответ округлите до сотых.

21. Маша коллекционирует принцесс из киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть семь разных принцесс из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

22. Маша коллекционирует принцесс из киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном киндер-сюрпризе может с равными вероятностями

оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть три разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить ещё 1 или 2 шоколадных яйца?

23. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,3 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,6?

24. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,6 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,95?

25. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при одном выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее чем 0,99?

26. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом следующем – 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее чем 0,8?

27. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,6, а при каждом следующем – 0,8. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее чем 0,99.

28. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

29. Гроссмейстеры А и Б играют в шахматы. Если А играет белыми, то он выигрывает у Б с вероятностью 0,6. Если А играет черными, то А выигрывает у Б с вероятностью 0,4. Гроссмейстеры А и Б играют две партии, причем во второй партии меняются цветами фигур. Найдите вероятность того, что А выиграет оба раза.

30. Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,7. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,5. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что гроссмейстер А. хотя бы один раз проиграет.

31. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,07. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две такие батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

32. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две такие батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся бракованными.

33. Вероятность того, что одна отдельная новая батарейка бракованная, равна 0,03 независимо от других батареек. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две такие батарейки. Найдите вероятность того, что хотя бы одна батарейка в пачке бракованная.

34. Помещение освещается фонарем с двумя лампами. Вероятность перегорания каждой из ламп в течение года равна 0,2. Найдите вероятность того, что в течение года перегорят обе лампы.

35. Помещение освещается фонарем с двумя лампами. Вероятность перегорания каждой из ламп в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

36. Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной отдельно взятой лампы в течение года равна 0,2. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

37. Помещение освещается фонарем с тремя лампами. Вероятность перегорания каждой отдельной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

38. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что оба магазина доставят товар.

39. Системный администратор обслуживает два сервера. Вероятность того, что в течение дня первый сервер потребует вмешательства, равна 0,3. Вероятность того, что второй сервер потребует вмешательства, равна 0,2. Найдите вероятность того, что в течение дня ни один из серверов не потребует вмешательства.

40. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в каждом одном автомате закончится кофе, равна 0,3 независимо от состояния другого автомата. Найдите вероятность того, что кофе останется хотя бы в одном из автоматов.

41. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,07 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

42. В фирме такси есть два микроавтобуса. Каждый из них в случайный момент времени свободен с вероятностью 0,43. Какова вероятность того, что в случайный момент ни один автобус не будет свободен?

44. В магазине стоят два платежных автомата. Утром каждый из них неисправен с вероятностью 0,13 независимо от другого. Найдите вероятность того, что утром хотя бы один автомат исправен.

45. В интернет-магазине три телефонных оператора. В случайный момент оператор занят разговором с клиентом с вероятностью 0,7 независимо от других. Клиент звонит в магазин. Найдите вероятность того, что в этот момент все операторы заняты.

46. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,6 независимо от других продавцов. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца свободны одновременно.

47. В магазине одежды в случайный момент каждый продавец независимо от других занят с покупателем с вероятностью 0,2. Всего продавцов трое. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент хотя бы один из продавцов свободен.

48. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.

49. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

50. В торговом центре два одинаковых автомата продают шоколадные батончики. Вероятность того, что к концу дня в каждом отдельном автомате батончики закончатся, равна 0,2. Вероятность того, что батончики закончатся в обоих автоматах, равна 0,07. Найдите вероятность того, что к концу дня хотя бы в одном автомате закончатся батончики.

51. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,25. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

52. В небольшом магазине работают два продавца - Василий и Сергей. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,4. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что Василий занят, а Сергей свободен.

53. В парикмахерской работают два мастера. Вероятность того, что каждый отдельный мастер в данный момент занят, равна 0,6. Вероятность того, что оба мастера заняты, равна 0,28. Найдите вероятность того, что ровно один мастер свободен.

54. В кафе работают две официантки - Вера и Анна. Вероятность того, что кто-то из них может быть занят обслуживанием зала, составляет 0,35. Вероятность того, что обе свободны одновременно, составляет 0,4. Найдите вероятность того, что и Вера и Анна заняты одновременно.

55. В торговом центре установлены два автомата, продающие кофе. Вероятность того, что к концу дня кофе закончится в каждом отдельном автомате, равна 0,3. В обоих автоматах кофе заканчивается к вечеру с вероятностью 0,21. Вечером пришёл мастер, чтобы обслужить автоматы, и обнаружил, что в первом кофе закончился. Какова теперь вероятность того, что во втором автомате кофе тоже закончился?

56. В контрольной работе по физике две задачи: одна по теме «Механика», а другая по теме «Кинематика». Вероятность того, что

школьник П. решит первую задачу, составляет 0,75, а вторую - 0,6. Найдите вероятность того, что школьник П. решит хотя бы одну из задач.

57. Экзаменационный билет состоит из трёх вопросов. Вероятность того, что студент М. ответит на первый вопрос, равна 0,9; на второй - 0,8; на третий - 0,7. Найдите вероятность того, что студент, выбрав билет, ответит на все вопросы.

58. Экзаменационный билет состоит из трёх вопросов. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,9; на второй - 0,8; на третий - 0,7. Найдите вероятность того, что студент, выбрав случайный билет, ответит по крайней мере на два вопроса.

59. Экзаменационный билет состоит из трёх вопросов. Вероятность того, что студент М. ответит на первый вопрос, равна 0,9; на второй - 0,8; на третий - 0,7. Найдите вероятность того, что студент М., выбрав билет, не ответит хотя бы на один вопрос.

60. Биатлонист стреляет по пяти мишеням - в каждую по одному разу. Вероятность попадания в каждую мишень равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишень, а последние два промахнулся. Результат округлить до сотых.

61. Биатлонист 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что биатлонист первые два раза попал в мишени, а последние два промахнулся.

62. Стрелок делает последовательно четыре выстрела по мишеням. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,7, при втором и последующих выстрелах вероятность попадания равна 0,9. Обозначим попадание буквой П, промах — буквой Н. Найдите вероятность элементарного исхода ННПП.

63. Биатлонист стреляет по пяти мишеням. На каждую мишень дается один выстрел. Вероятность промаха при одном выстреле равна 0,2 (независимо от результатов предыдущих выстрелов). Найдите вероятность того, что биатлонист поразит все мишени. Результат округлите до сотых. 0,33

64. Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые два раза попал в мишени, а последние три промахнулся.

65. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,2. Найдите вероятность того, что из трех таких случайно выбранных деталей ровно две окажутся бракованными.

66. В новой люстре три светодиодные лампы, которые включаются одновременно, но работают независимо друг от друга. Известно, что каждая отдельная лампа перегорает в течение первого года службы с вероятностью 0,2. Найдите вероятность события «в течение первого года перегорит ровно одна лампа из тех, что были установлены сначала».

III. Формула полной вероятности.

Формула Байеса.

Пример 1. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 72% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 95% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 15% пациентов, направленных на тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание? Найдите вероятность события "пациент болен, если результат теста оказался положительным". Ответ округлите до сотых.

Решение. Обозначим события: A_1 – «пациент болен», A_2 – «пациент здоров», B_1 – «результат теста положителен», B_2 – «результат теста отрицателен». Посчитаем вероятности $P(B_1)$ и $P(B_2)$: по условию $P(B_1)=0,15$ (вероятность того, что результат теста положителен);

тогда $P(B_2)=1-0,15=0,85$ (вероятность того, что результат теста отрицателен). По условию задачи известно, что если пациент болен, то вероятность положительного теста равна 0,72. Значит, вероятность отрицательного теста у больного человека равна $1-0,72=0,28$. То есть $P(B_1|A_1)=0,72$ (условная вероятность "результат теста положителен, если пациент болен"); $P(B_2|A_1)=0,28$ (условная вероятность "результат теста отрицателен, если пациент болен"). Если пациент здоров, то результат теста будет отрицательным с вероятностью 0,95. Значит, вероятность положительного теста у здорового человека равна $1-0,95=0,05$. То есть $P(B_2|A_2)=0,95$ (условная вероятность "результат теста отрицателен, если пациент здоров"); $P(B_1|A_2)=0,05$ (условная вероятность "результат теста положителен, если пациент здоров"). Найдем значение $P(A_1)$. Используем для нахождения известное значение $P(B_1)$, расписав его по формуле полной вероятности. Введем обозначения:

- пусть $P(A_1)=x$ (вероятность того, что пациент болен);
- тогда $P(A_2)=1-x$ (вероятность того, что пациент здоров).

Полная вероятность события B_1 (результат теста положителен) равна сумме вероятностей $P(B_1)=P(A_1) \cdot P(B_1|A_1)+P(A_2) \cdot P(B_1|A_2)$. Подставим числовые значения в полученную формулу $0,15=x \cdot 0,72+(1-x) \cdot 0,05$.

Решая это уравнение, найдем x :

$$0,15=0,72 \cdot x+0,05-0,05 \cdot x, \quad 0,67 \cdot x=0,1, \quad x=\frac{0,1}{0,67}=\frac{10}{67}.$$

Значит, $P(A_1)=\frac{10}{67}$.

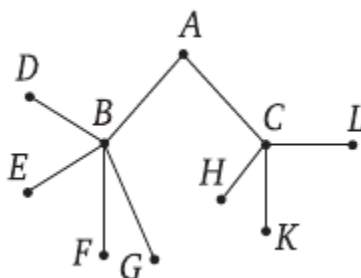
Вычислим вероятность события "пациент болен, если результат теста оказался положительным", то есть $P(A_1|B_1)$. По формуле Байеса

$$P(A_1|B_1)=\frac{P(A_1) \cdot P(B_1|A_1)}{P(A)}=\frac{\frac{10}{67} \cdot \frac{72}{100}}{\frac{15}{100}}=\frac{10 \cdot 72}{67 \cdot 15}=\frac{144}{201} \approx 0,72.$$

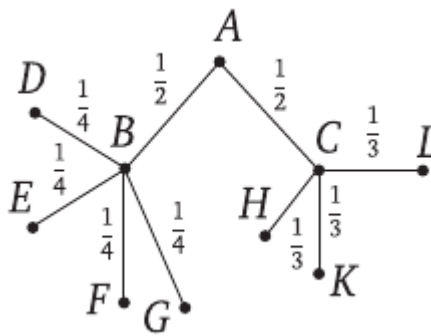
Ответ: 0,72.

Замечание. В следующих задачах для решения удобно использовать дерево вероятностей. Графом в математике называется множество точек, некоторые из которых (или все) соединены линиями — дугами, ребрами. Часто точки обозначают состояния какой-либо системы, а ребра — возможные переходы между состояниями. Как это делается, показывают задачи, которые мы предлагаем решить. Цепочки ребер образуют пути в графе. Дерево — частный случай графа. Дерево — такой граф, в котором нет замкнутых путей (циклов). Название «дерево» подчеркивает, что получается ветвящаяся конструкция. В части задач дерево построено прямо в условии. В других задачах это дерево следует построить.

Пример 2. Павел Иванович совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Иванович попадет в точку G .



Решение. Схема дорожек представляет собой граф. А именно — дерево. Обычно деревья рисуют корнем вверх, но это неважно. Здесь ребра (ветви) дерева соответствуют дорожкам. Около каждого ребра напомним вероятность того, что Павел Иванович пройдет по соответствующей дорожке. Выбор пути на каждой развилке происходит наудачу, поэтому вероятность поровну делится между всеми возможностями. Предположим, что Павел Иванович пришел в вершину C . Из нее выходит три ребра CH , CK и CL . Поэтому вероятность того, что Павел Иванович выберет ребро CH , равна $\frac{1}{3}$. Таким образом можно расставить все вероятности.

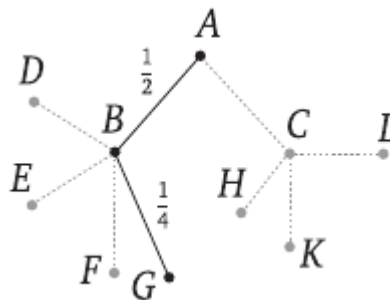


Каждый маршрут из начальной точки A в любую из конечных точек является элементарным событием в этом эксперименте. События здесь не равновозможные. Вероятность каждого элементарного события можно найти по правилу умножения. Нам нужно найти вероятность элементарного события G – «Павел Иванович пришел в точку G ». Это событие состоит в том, что Павел Иванович прошел маршрутом ABG . Вероятность находится умножением вероятностей вдоль ребер AB и BG

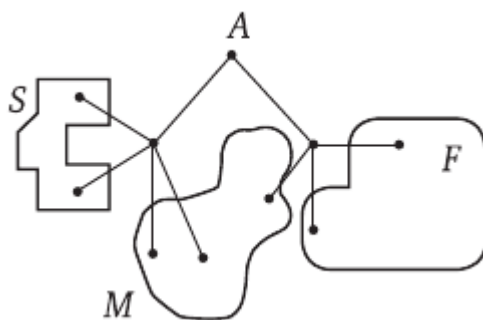
$$P(G) = P(ABG) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Ответ: 0,125.

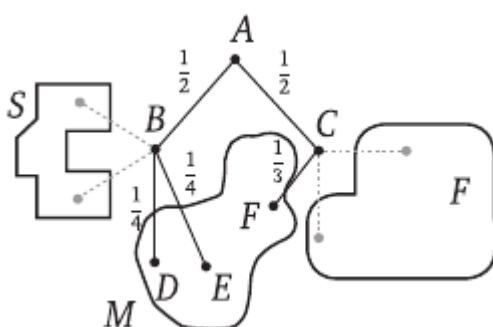
Замечание. Для решения задачи мы использовали только маршрут ABG , так как иначе нельзя попасть из A в G . Остальные маршруты нас не интересовали. Поэтому можно их подробно не рисовать.



Пример 3. Павел Иванович совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Часть маршрутов приводит к поселку S , другие — в поле F или в болото M . Найдите вероятность того, что Павел Иванович забредет в болото. Ответ округлите до сотых.



Решение. В болото ведут три маршрута. Обозначим вершины на этих маршрутах и напишем на ребрах вдоль этих маршрутов соответствующие вероятности. Остальные маршруты не будем рассматривать.



Вероятность события «Павел Иванович попадет в болото», равна

$$P(M) = P(ABD) + P(ABE) + P(ACF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12} \approx 0,42.$$

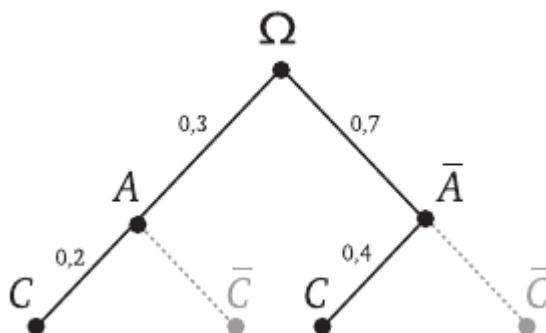
Ответ: 0,42.

Вспомогательная задача. В некотором эксперименте вероятность события A равна 0,3. Если событие A наступает, то вероятность события C равна 0,2, а в противоположном случае вероятность события C равна 0,4. Найдите вероятность события C.

Решение. Описанная схема является общей схемой для многих задач. В таких задачах удобно изобразить эксперимент графически деревом вероятностей. Отличие от предыдущих задач состоит в том, что вероятности на ребрах получаются не из равновозможности, а иначе.

Весь эксперимент обозначим буквой Ω (большая омега) и поставим точку около этой буквы — корень дерева, из которого ветви-ребра растут вниз. Из точки Ω проведем ребро вниз-влево в точку A. Событие A имеет вероятность 0,3, поэтому подпишем у этого ребра вероятность 0,3.

Противоположное событие $\bar{A}$ имеет вероятность 0,7. Проведем второе ребро в точку $\bar{A}$. Если осуществилось событие A , то событие C по условию имеет вероятность 0,2. Поэтому из точки A проведем ребро вниз-влево в точку C и подпишем вероятность. Действуя так же и дальше, построим все дерево (см. рисунок).



Чтобы найти вероятность события C , нужно выделить только те пути, которые ведут из корневой точки к событию C . На рисунке мы оставили эти пути яркими, а пути, не приводящие к C , изобразили бледно. Выделенные пути ΩAC и $\Omega \bar{A} C$ являются элементарными событиями, благоприятствующими событию C . Теперь нужно вычислить вероятности выделенных путей и сложить их. Пользуясь правилами умножения и сложения вероятностей, получаем $P(C) = P(\Omega AC) + P(\Omega \bar{A} C) = 0,3 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,4 = 0,06 + 0,28 = 0,34$.

Ответ: 0,34.

Пример 4. Две фабрики одной фирмы выпускают одинаковые мобильные телефоны. Первая фабрика выпускает 30% всех телефонов этой марки, а вторая— остальные телефоны. Известно, что из всех телефонов, выпускаемых первой фабрикой, 1% имеют скрытые дефекты, а из выпускаемых второй фабрикой— 1,5%. Найдите вероятность того, что купленный в магазине телефон этой марки имеет скрытый дефект.

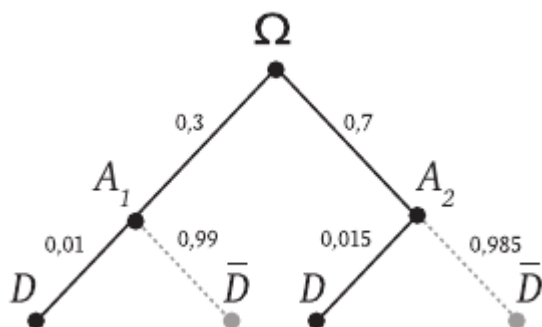
Решение. Введем обозначения для событий:

A_1 = телефон выпущен на первой фабрике

A_2 = телефон выпущен на второй фабрике ,

D = телефон имеет скрытый дефект .

По условию задачи легко составить дерево и найти необходимые вероятности.

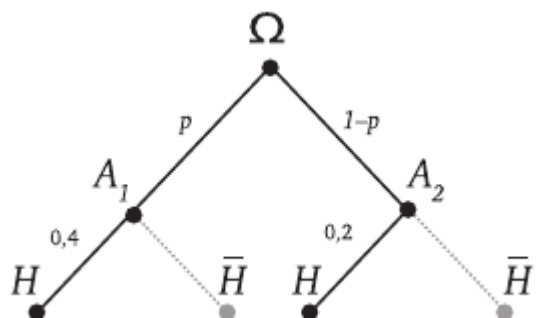


$$P(D) = 0,3 \cdot 0,01 + 0,7 \cdot 0,015 = 0,003 + 0,0105 = 0,0135.$$

Ответ: 0,0135.

Пример 5. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства— яйца высшей категории, а из второго хозяйства— 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц из этих двух хозяйств. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение. Эта задача обратна предыдущей. Событие «яйцо имеет высшую категорию» назовем H . События «яйцо поступило из первого хозяйства» и «яйцо поступило из второго хозяйства» назовем A_1 и A_2 соответственно. Обозначим через p искомую вероятность события A_1 и составим дерево.

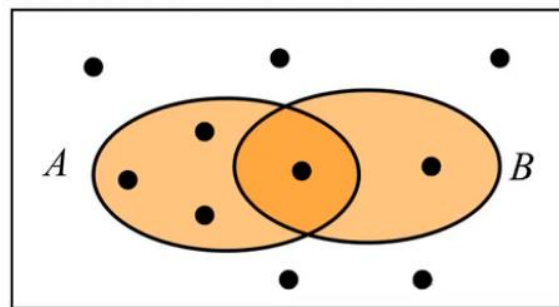


Получаем $P(H) = p \cdot 0,4 + (1 - p) \cdot 0,2$. По условию эта величина равна 0,35.

Тогда $0,4p + 0,2(1 - p) = 0,35$, откуда $0,2p = 0,15$ и, значит, $p = 0,75$.

Ответ: 0,75.

Пример 6. На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность события B при условии A .



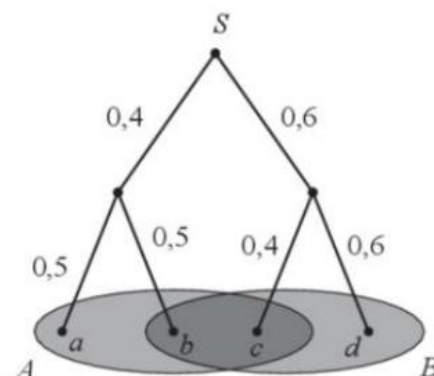
Решение. События A и B зависимые. Значит, по теореме о вероятности произведения событий $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$. Тогда

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$. Из диаграммы, по классическому определению вероятности,

$$P(AB) = \frac{1}{10}, \quad P(A) = \frac{4}{10}. \quad \text{Значит, } P(B|A) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

Пример 7. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a , b и c , а событию B — элементарные события b , c и d . Найдите $P(A|B)$ условную вероятность события A при условии B .



Решение. По формуле вероятности

произведения событий, $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ - вероятность события A при

условии, что произошло событие B . По теоремам о сумме и произведения событий, $P(B) = 0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,6 = 0,8$ - вероятность события B ;

$P(AB) = 0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,44$ - вероятность произведения событий A и B .

Тогда $P(A|B) = \frac{0,44}{0,8} = 0,55$.

Ответ : 0,55.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причем погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такая же, как сегодня. Сегодня 3 июля, и погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

2. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и замечательная, причем погода держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такая же, как сегодня. Сегодня 3 июля, и погода в Волшебной стране замечательная. Найдите вероятность того, что 5 июля погода в Волшебной стране также будет замечательная.

3. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватается первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.

4. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая – 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стёкол, а вторая – 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

5. На двух комбинатах выпускают пакеты с кефиром одной и той же марки. Комбинат «Бурёнка» выпускает 70 % таких пакетов, а все остальные пакеты выпускает комбинат «Милка». Известно, что 3 % пакетов, выпущенных на комбинате «Бурёнка», и 2 % пакетов, выпущенных на комбинате «Милка», протекают. Все пакеты поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранный в магазине пакет не протекает.

6. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

7. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ дает положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно болеют гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

8. Всем пациентам с подозрением на одну из тропических лихорадок делают анализ крови. Если анализ выявляет возбудителя лихорадки, то результат анализа называется положительным. У больных лихорадкой пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если лихорадки нет, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что у пациентов, поступающих с подозрением на лихорадку, анализ оказывается положительным в 19,6 % случаев. Найдите вероятность того, что поступивший с подозрением пациент действительно болен этой лихорадкой.

9. При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 86% случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 94% случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 10% пациентов, направленных на

тестирование. При обследовании некоторого пациента врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент действительно имеет это заболевание?

10. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма выпавших на ней очков не превысила число 2. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

11. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

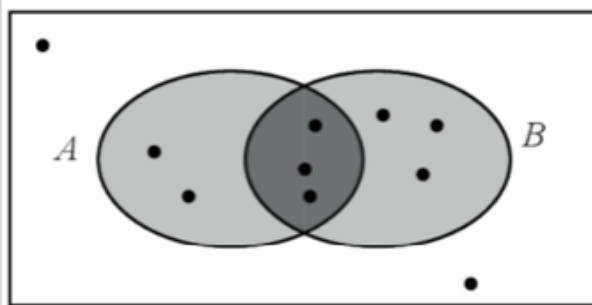
12. Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 6. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

13. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.

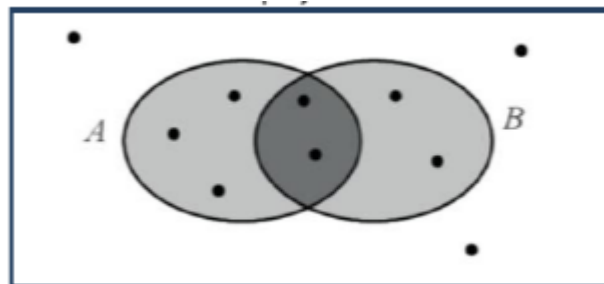
14. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 3. Какова вероятность того, что был сделан один бросок? Ответ округлите до сотых.

15. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что потребовалось сделать три броска? Ответ округлите до сотых.

16. На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность события B при условии A .



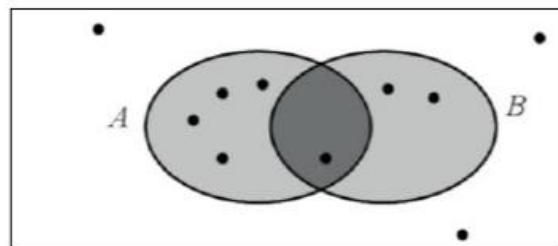
17. На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий.



Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность события B при условии A .

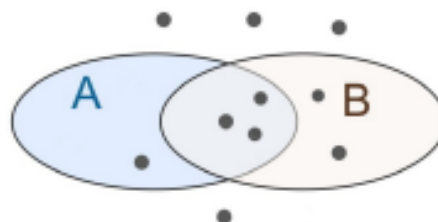
18. На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в

котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность события B при условии A .

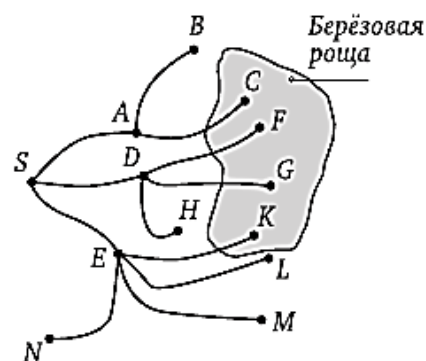


19. На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в

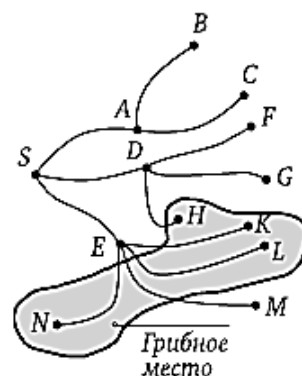
котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность события B при условии A .



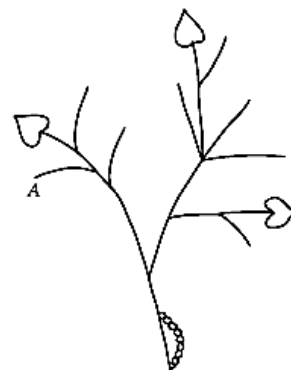
20. На рисунке показана схема лесных дорожек. Пешеход идет из точки S по дорожкам, на каждой развилке выбирая дорожку случайным образом и никогда не возвращаясь обратно. Найдите вероятность того, что он попадет в точку M . Ответ округлите до сотых.



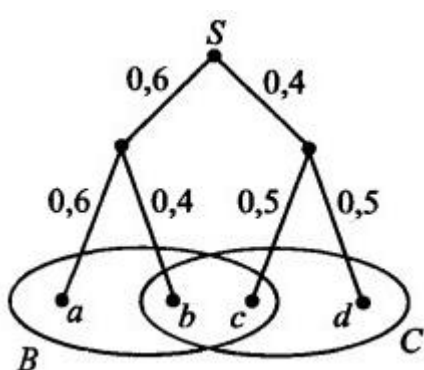
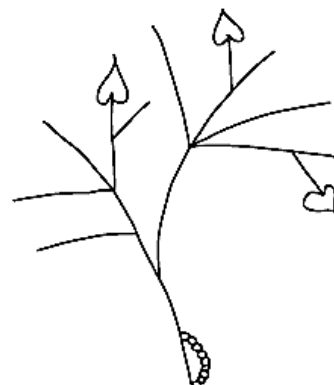
21. На рисунке показана схема лесных дорожек. Пешеход идет из точки S по дорожкам, на каждой развилке выбирая дорожку случайным образом и не возвращаясь обратно. Найдите вероятность того, что он попадет в точку F . Ответ округлите до сотых.



22. Гусеница ползет вверх по ветви куста (см. рисунок). На каждом разветвлении гусеница с равными шансами может попасть на любую из растущих веточек. Какова вероятность того, что гусеница попадет в точку A ?

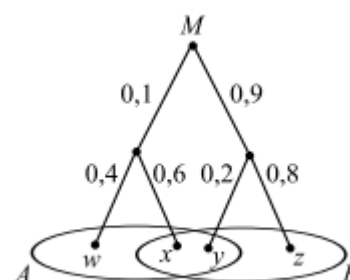


23. Гусеница ползет вверх по ветви куста. На каждой развилке гусеница с равными шансами может попасть на любую из растущих веточек. Найдите вероятность того, что гусеница доберется до одного из листьев. Ответ округлите до сотых.



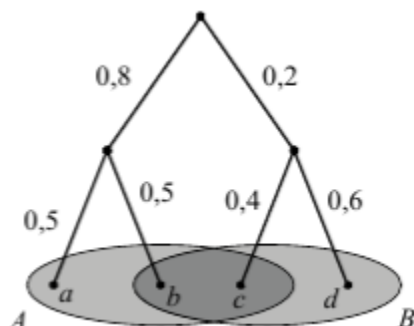
24. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию B благоприятствуют элементарные события a , b и c , а событию C благоприятствуют элементарные события b , c и d . Найдите $P(B|C)$ - условную вероятность события B при условии C .

25. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события w , x и y ,



событию B благоприятствуют элементарные события x, y и z . Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность события A при условии B .

26. На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b и c , а событию B



благоприятствуют элементарные события b, c и d . Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность события A при условии B .

IV. Схема Бернулли.

Пример 1. Мастер обслуживает 6 станков. Вероятность поломки одного станка в течение дня равна $\frac{1}{3}$. Во сколько раз вероятность события «в течение дня ровно два станка потребуют ремонта» больше, чем вероятность события «в течение дня ровно 3 станка потребуют ремонта»?

Решение. Данный эксперимент удовлетворяет схеме Бернулли: проводится 6 независимых испытаний, в каждом из которых либо наступает, либо не наступает событие A — «станок потребует ремонта», вероятность наступления которого постоянна и равна $p = \frac{1}{3}$. Тогда вероятность не

наступления события A равна $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. По формуле Бернулли, вероятность того, что событие A наступит ровно два раза из 6 равна

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot p^2 \cdot q^{6-2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{15 \cdot 2^4}{3^6}, \text{ вероятность того, что событие } A$$

$$\text{наступит ровно три раза из 6 равна } P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^{6-3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{20 \cdot 2^3}{3^6}.$$

$$\text{Тогда } \frac{P_6(2)}{P_6(3)} = \frac{\frac{15 \cdot 2^4}{3^6}}{\frac{20 \cdot 2^3}{3^6}} = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В магазине куплено 12 одинаковых луковиц гиацинтов. Вероятность того, что каждая отдельная луковица успешно прорастет, равна 0,8. Во сколько раз вероятность события «прорастет ровно 7 луковиц» больше вероятности события «прорастет ровно 5 луковиц»?

2. В тире стрелок стреляет по 10 одинаковым мишеням по одному разу. Вероятность попасть в каждую из них равна 0,5. Во сколько раз вероятность события «будут поражены ровно 3 мишени» меньше вероятности события «будут поражены ровно 5 мишеней»?

3. Баскетболист на тренировке бросает мяч в кольцо 12 раз. Вероятность попадания при каждой отдельной попытке равна 0,4. Во сколько раз вероятность события «ровно 4 попадания» больше вероятности события «ровно 3 попадания»?

4. Тренер полагает, что баскетболист А. попадает в корзину в среднем семь раз из десяти. Считая это предположение верным, найдите вероятность того, что А. попадёт в корзину ровно четыре раза из шести попыток. Результат округлите до тысячных.

5. На фабрике производят батарейки. В среднем 4 % батареек, поступающих в продажу, неисправны. Найдите вероятность того, что в упаковке, в которой 8 батареек, окажется ровно две неисправных. Результат округлите до тысячных.

6. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить

мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно пять мишеней» больше вероятности события «стрелок поразит ровно четыре мишени»?

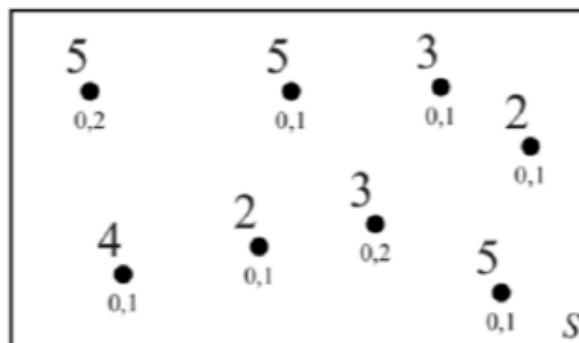
7. Симметричную монету бросают 8 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 4 орла» больше вероятности события «выпадет ровно 3 орла»?

8. Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

9. Симметричную монету бросают 22 раза. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 10 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 9 орлов»?

V. Элементы математической статистики.

Пример 1. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Около каждого элементарного события указана вероятность этого события и соответствующее значение случайной величины X .



Решение. Вероятность события ($X=5$): $P_1(5)=0,2$; $P_2(5)=0,1$; $P_3(5)=0,1$. В совокупности вероятность события ($X=5$): $P(5) = P_1 + P_2 + P_3 = 0,2+0,1+0,1=0,4$.

Ответ: 0,4.

Пример 2. В таблице показано распределение случайной величины X .

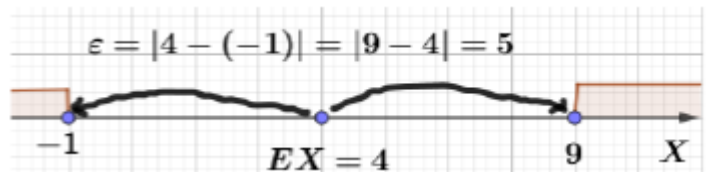
Значения X	-4	0	1	3
Вероятности	0,2	0,1	0,4	0,3

Найдите EX –математическое ожидание этой случайной величины.

Решение. Математическое ожидание случайной величины $EX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$, $EX = -4 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,3 = 0,5$.
 Ответ: 0,5.

Пример 3. Про случайную величину X известно, что $EX=4$ и $DX=10$. Найдите оценку вероятности события « $X \leq -1$ или $X \geq 9$ », которую дает неравенство Чебышёва.

Решение. Математическое ожидание случайной величины - $EX=4$, дисперсия - $DX=10$. Вероятность того, что отклонение значения случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине больше положительного числа ε , не



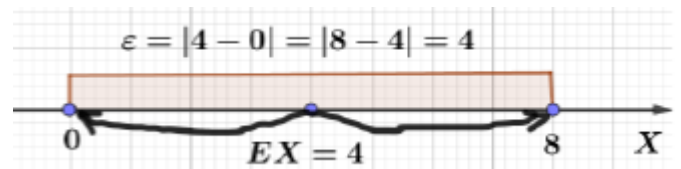
больше, чем $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, а именно, $P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$. Оценка вероятности

события « $X \leq -1$ или $X \geq 9$ » равна $P(|X - 4| \geq 5) \leq \frac{10}{5^2} = \frac{10}{25} = 0,4$.

Ответ: 0,4.

Пример 4. Про случайную величину X известно, что $EX = 4$ и $DX=10$. Найдите нижнюю оценку вероятности события « $0 < X < 8$ », которую дает неравенство Чебышёва.

Решение. Математическое ожидание случайной величины - $EX = 4$, дисперсия - $DX = 10$. Вероятность того, что отклонение значения случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше



положительного числа ε , не меньше, чем $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, а именно,

$P(|X - EX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$. Оценка вероятности события « $0 < X < 8$ » равна

$$P(|X - 4| < 4) \geq 1 - \frac{10}{4^2} = 1 - \frac{10}{16} = \frac{6}{16} = 0,375.$$

Ответ: 0,375.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Задано распределение случайной величины X . Найдите её математическое ожидание.

X	-2	-1	1	2
p	0,1	0,4	0,4	0,1

2. В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-4	0	1	3
Вероятности	0,2	0,1	0,4	0,3

3. В таблице показано распределение случайной величины X .

Значения X	-5	1	2	3
Вероятности	0,3	0,2	0,3	0,2

Найдите EX — математическое ожидание этой случайной величины.

4. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши

Выигрыш	10	50	100	5000
Количество билетов	990	6	3	1

беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи

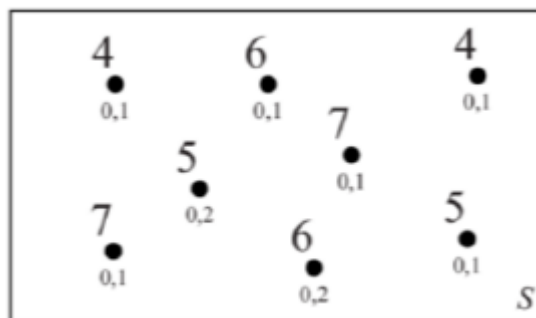
равна 50 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

5. В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи.

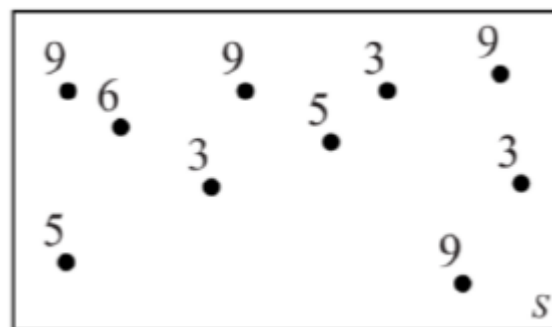
Выигрыш	20	1000	10 000	50 000
Количество билетов	990	5	4	1

Цена билета лотереи равна 200 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

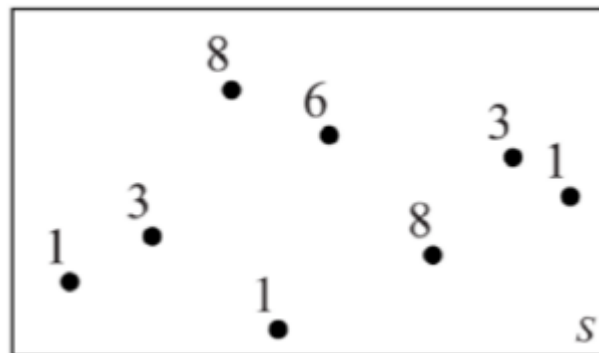
6. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Около каждого элементарного события указана вероятность этого события и соответствующее значение случайной величины X . Найдите вероятность события $(5 \leq X < 7)$.



7. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Все элементарные события равновозможны, и около каждого указано соответствующее значение случайной величины X . Найдите вероятность события $(X=9)$.



8. На диаграмме Эйлера схематически показан случайный опыт S , с которым связана случайная величина X . Все элементарные события равновозможны, и около каждого указано соответствующее значение случайной величины X . Найдите вероятность события $(X \leq 4,7)$.



9. Известно, что средний диаметр подшипника равен 24 мм, а стандартное отклонение от среднего диаметра равно 0,4 мм. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «диаметр случайно выбранного подшипника отличается от среднего более чем на 0,8 мм». 0,25

10. Сторона квадратной керамической плитки равна 30 см, а стандартное отклонение равно 0,6 мм. При помощи неравенства Чебышёва найдите верхнюю оценку вероятности события «сторона случайно выбранной керамической плитки отличается от среднего более чем на 0,75 мм».

11. Про случайную величину X известно, что $EX = 4$ и $DX = 10$. Найдите оценку вероятности события « $X \leq 0$ или $X \geq 8$ », которую дает неравенство Чебышёва.

12. Известно, что средний диаметр подшипника равен 15 мм, а стандартное отклонение от среднего диаметра равно 0,2 мм. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «диаметр случайно выбранного подшипника отличается от среднего более чем на 0,5 мм».

13. Известно, что средняя масса упаковки наполнителя для игрушек равна 500 г, а стандартное отклонение от средней массы равно 40 г. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «масса наполнителя в случайно выбранной упаковке отличается от средней более чем на 75 г». Ответ округлите до тысячных.

VI. Задачи повышенного уровня сложности.

Пример 1. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует четное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если игроков нечетно, то с помощью жребия выбираются игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 8 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игроков равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

Решение. Пусть в турнире n участников. В результате каждой сыгранной партии выбывает один участник, поэтому всего состоится $n - 1$ партия. При этом никакая пара не может сыграть две партии, поскольку проигравший выбывает. Следовательно, игровых пар на протяжении всего турнира тоже $n - 1$. Всего же из n участников можно составить C_n^2 пар игроков, но только $n - 1$ из этих возможных пар окажутся игровыми, то есть сыграют между собой. В силу случайности выбора и равной силы противников в каждой партии, вероятность того, что двое наперёд заданных участников попадут в одну из игровых пар, равна

$$\frac{n-1}{C_n^2} = \frac{2!(n-2)!(n-1)}{n!} = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}.$$

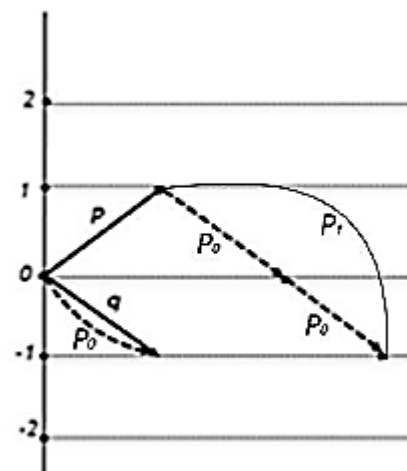
$$n = 8: \quad p = \frac{2}{n} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

Пример 2. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p=0,8$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1-p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1?

Решение. Пусть P_0 – вероятность попасть в точку (-1), если вначале мы находились в точке 0. Так как из точки 0 можно пойти вверх с вероятностью $p=0,8$ или вниз с вероятностью $q=1-p=1-0,8=0,2$ и эти события несовместны, то $P_0 = q + p \cdot P_1$, где P_1 – вероятность попасть в точку (-1), находясь в точке 1. Так как P_0 – это фактически вероятность из данной начальной точки достигнуть точку на единицу ниже, то

$$P_1 = P_0 \cdot P_0 = P_0^2. \text{ Тогда получим уравнение}$$



$$\begin{aligned}
P_0 &= q + p \cdot P_1, \\
P_0 &= q + p \cdot P_0^2, \\
p \cdot P_0^2 - P_0 + q &= 0, \\
0,8 P_0^2 - P_0 + 0,2 &= 0, \\
D &= 1 - 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,36, \\
P_0 &= \frac{1 \pm 0,6}{1,6}, \quad P_0 = 1 \text{ или } P_0 = 0,25.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $P_0 < 1$, получим $P_0 = 0,25$.

Ответ: 0,25.

Пример 3. В викторине участвуют 5 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двух играх победила команда A . Какова вероятность того, что эта команда выиграет третий раунд?

Решение.

В n играх команда A выиграла. Вероятность победить в $n+1$ -ом раунде

Количество раундов (игр)	Количество команд, принявших участие	Вероятность того, что команда A проигрывает	Вероятность того, что команда A выигрывает
n	$n+1$ (среди них есть A)		
$n+1$	$n+1$ (среди них есть A) + 1 (более сильная) = $n+2$	$\frac{1}{n+2}$	$1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$

Тогда $p = \frac{3}{4} = 0,75$.

Ответ: 0,75.

Пример 4. Монету подбрасывают до тех пор, пока орёл не выпадет два раза (не обязательно подряд). Найдите математическое ожидание числа бросков.

Решение. Если некоторое событие наступает с вероятностью p , то в серии испытаний это событие в среднем первый раз будет наступать на шаге с номером $\frac{1}{p}$. В данной задаче вероятность выпадения орла равна 0,5, поэтому при многократных бросаниях в среднем первый раз орел будет выпадать на втором шаге. Второй орел — еще через два шага. Два орла в среднем будут выпадать за 4 броска.

Ответ: 4.

Пример 5. Монету бросают 250 раз. Чему равно математическое ожидание числа выпавших орлов?

Решение. Случайная величина X - число выпавших орлов при подбрасывании монеты подчиняется биномиальному закону распределения.

$n = 250, p = \frac{1}{2}$. Известно, что математическое ожидание такой случайной величины вычисляется по формуле $EX = np$. Значит,

$$EX = 250 \cdot \frac{1}{2} = 125.$$

Ответ: 125.

Представим окончательный вывод при решении данных задач в виде таблицы:

Задача	Решение
Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует четное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если игроков нечетно, то с помощью жребия выбираются игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует n игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга — Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?	$\frac{2}{n}$

Монету подбрасывают до тех пор, пока орёл не выпадет n раз (не обязательно подряд). Найдите математическое ожидание числа бросков. Вероятность выпадения орла при подбрасывании монеты равна $p = \frac{1}{2}$.	$EX = \frac{n}{p}, \text{ где } p - \text{вероятность наступления соответствующего события.}$
Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью p на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1?	При всех p таких, что $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$ вероятность равна $P = 1$. При $p > \frac{1}{2}$ $P = \frac{1-p}{p}$.
В викторине участвуют d команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых n играх победила команда A. Какова вероятность того, что эта команда выиграет $(n+1)$-ый раунд?	$P = \frac{n+1}{n+2},$ где n - число игр, в которых команда A выиграла.
Монету бросают 250 раз. Чему равно математическое ожидание числа выпавших орлов (решек)? p - вероятность выпадения орла (решки)	$EX = np$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = \frac{10}{13}$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1-p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1 ?

2. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = \frac{5}{7}$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1-p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1 ?

3. Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = \frac{2}{3}$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1-p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1?

4. В викторине участвуют 6 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых трех играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет четвертый раунд.

5. В викторине участвуют 15 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых 8 играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет девятый раунд?

6. В викторине участвуют 10 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых шести играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет седьмой раунд?

7. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует четное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если игроков нечетно, то с

помощью жребия выбираются игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 16 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга — Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придётся сыграть друг с другом?

8. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует четное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если игроков нечетно, то с помощью жребия выбираются игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 32 игрока, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга – Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придётся сыграть друг с другом?

9. Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует четное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если игроков нечетно, то с помощью жребия выбираются игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна)

выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 25 игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игроков равна 0,5. Среди игроков два друга - Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придется сыграть друг с другом?

10. Монету бросают 175 раз. Чему равно математическое ожидание числа выпавших орлов?

11. Монету бросают 50 раз. Чему равно математическое ожидание числа выпавших орлов?

12. Монету бросают 120 раз. Чему равно математическое ожидание числа выпавших орлов?

13. Монету бросают 85 раз. Чему равно математическое ожидание числа выпавших орлов?

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1. Правила суммы и произведения.

Задание 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	648	20	34	8	28	6840	36	729	1024	$q(q-1)^{n-1}$
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	$n \text{ четно} : q^{\frac{n}{2}}$ $n \text{ нечетно} : q^{\frac{n+1}{2}}$	$a) m \cdot C_n^2 + n \cdot C_m^2$ $b) C_n^2 \cdot C_m^2$	3612	147	$a) 625$ $b) 8375$	23	720	поро- вну	$a) 6$ $b) 64$	180000

2. Факториал.

Задание 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ответ	$\frac{2}{3}$	9604	7744	1980	1	6012	38	3463	1

Задание 2

Номер задания	1	2	3	4	5	6		7	8
Ответ	$n\left(n^2-1\right)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+2}{n+1}$	$\frac{n+3}{n+1}$	$\frac{n^2+1}{\left(n+1\right)!}$	$\left(n+1\right)\left(n+2\right) \ldots\left(2 n\right)$		$\frac{n+3}{n-2}$	$\frac{-1}{n\left(n+1\right)}$
Номер задания	9	10		11	12	13	14	15	
Ответ	$\frac{n^2+1}{\left(n+1\right)!}$	$\frac{\left(n+2\right)^2}{n\left(n+1\right)\left(3 n+4\right)}$		$n\left(n-2\right)^2$	$\frac{1}{\left(n-3\right)!}$	$\frac{1}{n+2}$	$\frac{1}{\left(n+2\right)!}$	$\frac{-n}{\left(n+1\right)\left(n+3\right)}$	

Задание 3

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	2	42	72	3	2	1 или 3	11	13	11	40

3. Сочетания, размещения и перестановки без повторений.

Задание 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	1770	40320	720	12!	90	120	495	$\frac{100!}{10! \cdot 90!}$	60	120
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	3	$\frac{90!}{10! \cdot 80!}$	495	60	120	10	10!	$\frac{80!}{4! \cdot 76!}$	6	120
Номер задания	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ответ	10!	100	4	3276	24	27405	60480	10626	110	210

Задание 2

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	2014	24	120	$6 \cdot \frac{32!}{16! \cdot 16!}$	$4! \cdot 5! \cdot 9! \cdot 10!$	720	960	96	70	1583

4. Комбинаторные соединения.

Задание 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6
Ответ	16	390	4	5,5	1	$\frac{101}{136}$

Задание 2

Номер задания	1	2	3	4	5	6
Ответ	верно	верно	верно	верно	неверно	неверно

Задание 3

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ответ	7	4	4	8	6	11	5	$x = 8,$ $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	6

Задание 2

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Ответ	(7; 3)	(5; 2)	(5; 2)	(7; 4)	(9; 3)	(7; 3)	(7; 3)	(7; 3)

5. Сочетания, размещения и перестановки с повторениями.**Задание 1**

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	84	216	4096	9999	151200	55	91	792	120	1024
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	16^{100}	243	2304	5040	10^6	$\frac{114!}{100! \cdot 14!}$	72	195	62	$\frac{17576000}{676000}$

ГЛАВА 2**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ****2. Классическое определение вероятности.****Задание 1**

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	0,5	0,375	0,5	0,14	7; 0,19	0,42	0,25	0,6	0,25	0,006
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	0,3	0,36	0,48	0,25	0,375	0,125	0,33	а) 0,36 б) 0,64	0,33	0,90

Задание 2

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	$\frac{1}{120}$	$\frac{2}{9}$	0,3	$\frac{1}{720}$	$\frac{400}{1001}$	$\frac{14}{55}$	$\frac{24}{91}$	0,1	$\frac{1}{625}$	$\frac{2}{7}$
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	0,72	$\frac{455}{2584}$	$\frac{9}{54145}$	$\frac{1}{720}$	0,00252	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{9 \cdot 10^6}$	$\frac{13}{4620}$	$\frac{2185}{206271}$	$\frac{1}{3}$

3. Геометрическое определение вероятности.

Задание 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	$\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{6}$	0,25

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	$\frac{1}{6}$	0,25	0,25	$\frac{1}{6}$	0,25	$\frac{2}{3}$	а) $\frac{2}{3}$ б) $\frac{2}{3}$	0,27	P(A)=0,4375 P(B)=0,5625 P(C)=0,2188 P(D)=0,25 P(E)=0,2813 P(F)=0,0417	0,25

4. Статистическое определение вероятности.

Задание 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	0,006	0,98	0,515	0,5069	0,004	30	100	20	27	30

6. Вероятность суммы и произведения событий.

Задание 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ответ	1) 0,81263 2) 0,00027 3) 0,17501 4) 0,01209 5) 0,18737	0,17	$\frac{35}{228}$	0,55	а) 0,14 б) 0,995	а) 0,58 б) 0,46	0,18, неверно	а) 0,855 б) 0,095 в) 0,14	а) 0,72 б) 0,26 в) 0,28

Номер задания	10	11	12	13	14	15	16
Ответ	а) 0,02525 б) 0,24725 в) 0,974	0,6	$\frac{11}{57}$	$P_A(B) \approx 0,39$; $P_A(\bar{B}) \approx 0,61$; $P_{\bar{A}}(B) \approx 0,102$; $P_{\bar{A}}(\bar{B}) \approx 0,898$.	1) 0,8 2) 0,4 3) 0,6	а) $\approx 0,791$ б) $\approx 0,142$ в) 0,1	$P(0) = \frac{11}{32}$; $P(1) = \frac{4}{32}$ $P(2) = \frac{9}{32}$; $P(3) = \frac{4}{32}$ $P(4) = \frac{4}{32}$

Номер задания	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ответ	0,0664	а) 0,316 б) 0,3816	0,75	0,12	$\frac{19}{26}$	0,94	$\frac{17}{90}$	0,48 ³	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{15}$	0,1	0,94	0,72	0,7

7. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Задание 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	0,895	0,815	$\approx 0,763$	$\approx 0,445$	а) 0,588 б) 0,412	$\approx 0,38$	$\frac{3}{7}$	1) 0,8677 2) 0,1052 3) 0,0271	H_1	$\approx 0,214$
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	$\approx 0,176$	0,5	0,3875	0,003	равновероятны	0,44	$\frac{43}{60}$	0,0715	$\frac{30}{43}$	0,87
Номер задания	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ответ	0,5825	0,86 без оптического прицела	0,68; $\frac{10}{17}$	0,65; $\frac{6}{13}$	0,0145; $\frac{18}{29}$	$\frac{5}{11}$	0,167	0,5; 0,2	0,52; второй	0,74; $\frac{16}{37}$

8. Схема Бернулли.

Задание 1

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	$\approx 0,2787$	3 из 4	$\frac{80}{243}$	$\frac{11}{243}$	0,5	$\approx 0,3241$	3 из 4	$\approx 0,0714$	$\approx 0,2508$	$\approx 0,0512$
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18		
Ответ	$\approx 0,0584$	$\approx 0,7748$	$\approx 0,68256$	$\approx 0,0031$	$\approx 0,7361$	$\approx 0,000448$	$\approx 0,0355$	$\approx 0,2376$		
Номер задания	19	20	21	22						
Ответ	4 из 20	$\approx 0,2753$	$\approx 0,000019$	0,18522						

Задание 2

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	8	14 или 15	22	8	2	3 или 4	3	2	66; 67; 68; 69	$0,6 \leq p \leq 0,62$
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Ответ	$0,625 \leq p \leq 0,65$	105	21	11; 12 ; 13	14; 15; 16; 17	8	7	≥ 59	4; 0,251	

Номер задания	20	21	22	23	
Ответ	$100 \leq n \leq 1025$	48	$0,6 \leq p \leq 0,62$	$0,625 \leq p \leq 0,650$	

ГЛАВА 3 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1. Случайные величины.

1	<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>P</td><td>0,25</td><td>0,5</td><td>0,25</td></tr></table>	X	0	1	2	P	0,25	0,5	0,25						
X	0	1	2												
P	0,25	0,5	0,25												
2	<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>0,729</td><td>0,243</td><td>0,027</td><td>0,001</td></tr></table>	X	0	1	2	3	P	0,729	0,243	0,027	0,001				
X	0	1	2	3											
P	0,729	0,243	0,027	0,001											
3	<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>0,24</td><td>0,46</td><td>0,26</td><td>0,04</td></tr></table> $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty; 0], \\ 0,24 & \text{при } x \in (0; 1], \\ 0,7 & \text{при } x \in (1; 2], \\ 0,96 & \text{при } x \in (2; 3], \\ 1 & \text{при } x \in (3; +\infty). \end{cases}$	X	0	1	2	3	P	0,24	0,46	0,26	0,04				
X	0	1	2	3											
P	0,24	0,46	0,26	0,04											
4	<table><tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>0,2</td><td>0,6</td><td>0,2</td></tr></table>	X	1	2	3	P	0,2	0,6	0,2						
X	1	2	3												
P	0,2	0,6	0,2												
5	<table><tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>...</td><td>k</td><td>...</td></tr><tr><td>p</td><td>0,2</td><td>0,16</td><td>0,12 8</td><td>...</td><td>0,8^{k-1}0,2</td><td>...</td></tr></table>	X	1	2	3	...	k	...	p	0,2	0,16	0,12 8	...	0,8 ^{k-1} 0,2	...
X	1	2	3	...	k	...									
p	0,2	0,16	0,12 8	...	0,8 ^{k-1} 0,2	...									
6	<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>p</td><td>0,8</td><td>0,11</td><td>0,05</td><td>0,04</td></tr></table> $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty; 0], \\ 0,8 & \text{при } x \in (0; 1], \\ 0,91 & \text{при } x \in (1; 4], \\ 0,96 & \text{при } x \in (4; 5], \\ 1 & \text{при } x \in (5; +\infty). \end{cases}$	X	0	1	4	5	p	0,8	0,11	0,05	0,04				
X	0	1	4	5											
p	0,8	0,11	0,05	0,04											

7	<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>p</td><td>$\frac{1}{8}$</td><td>$\frac{3}{8}$</td><td>$\frac{3}{8}$</td><td>$\frac{1}{8}$</td></tr></table> $M(X) = \frac{3}{2}, \quad D(X) = \frac{3}{4}, \quad \sigma(X) \approx 0,87$	X	0	1	2	3	p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		
X	0	1	2	3									
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$									
8	<table><tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>p</td><td>0,3</td><td>0,21</td><td>0,49</td></tr></table> $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty; 1], \\ 0,3 & \text{при } x \in (1; 2], \\ 0,51 & \text{при } x \in (2; 3], \\ 1 & \text{при } x \in (3; +\infty). \end{cases}$ $M(X) = 2,19, \quad D(X) = 0,7539, \quad \sigma(X) \approx 0,87$	X	1	2	3	p	0,3	0,21	0,49				
X	1	2	3										
p	0,3	0,21	0,49										
9	<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{1}{30}$</td></tr></table> $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty; 0], \\ \frac{1}{6} & \text{при } x \in (0; 1], \\ \frac{2}{3} & \text{при } x \in (1; 2], \\ \frac{29}{30} & \text{при } x \in (2; 3], \\ 1 & \text{при } x \in (3; +\infty). \end{cases}$ $M(X) = 1,2; \quad D(X) = 0,56.$	X	0	1	2	3	P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$		
X	0	1	2	3									
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$									
10	<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>$\frac{1}{14}$</td><td>$\frac{3}{7}$</td><td>$\frac{3}{7}$</td><td>$\frac{1}{14}$</td></tr></table> $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty; 0], \\ \frac{1}{14} & \text{при } x \in (0; 1], \\ \frac{1}{2} & \text{при } x \in (1; 2], \\ \frac{13}{14} & \text{при } x \in (2; 3], \\ 1 & \text{при } x \in (3; +\infty). \end{cases}$	X	0	1	2	3	P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$		
X	0	1	2	3									
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$									
11	<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>0,006</td><td>0,092</td><td>0,398</td><td>0,504</td></tr></table> $M(X) = 2,4; \quad D(X) = 0,46.$	X	0	1	2	3	P	0,006	0,092	0,398	0,504		
X	0	1	2	3									
P	0,006	0,092	0,398	0,504									
12	<table><tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>0,1</td><td>0,18</td><td>0,72</td></tr></table> $M(X) = 2,62$	X	1	2	3	P	0,1	0,18	0,72				
X	1	2	3										
P	0,1	0,18	0,72										
13	<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>P</td><td>0,6561</td><td>0,2916</td><td>0,0486</td><td>0,0036</td><td>0,0001</td></tr></table> $M(X) = 0,4; \quad D(X) = 0,36; \quad \sigma(X) = 0,6.$	X	0	1	2	3	4	P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001
X	0	1	2	3	4								
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001								

14	<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>P</td><td>0,4096</td><td>0,4096</td><td>0,1536</td><td>0,0256</td><td>0,0016</td></tr></table> $M(X) = 0,8; D(X) = 0,64 .$	X	0	1	2	3	4	P	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016
X	0	1	2	3	4								
P	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016								
15	<table><tr><td>X</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>P</td><td>0,04</td><td>0,12</td><td>0,29</td><td>0,30</td><td>0,25</td></tr></table> $M(X) = 8,6; D(X) = 1,22 .$	X	6	7	8	9	10	P	0,04	0,12	0,29	0,30	0,25
X	6	7	8	9	10								
P	0,04	0,12	0,29	0,30	0,25								
16	<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>0,096</td><td>0,472</td><td>0,368</td><td>0,064</td></tr></table>	X	0	1	2	3	P	0,096	0,472	0,368	0,064		
X	0	1	2	3									
P	0,096	0,472	0,368	0,064									
17	<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>0,06</td><td>0,29</td><td>0,44</td><td>0,21</td></tr></table> $M(X) = 1,8; D(X) = 0,7 .$	X	0	1	2	3	P	0,06	0,29	0,44	0,21		
X	0	1	2	3									
P	0,06	0,29	0,44	0,21									
18	<table><tr><td>X</td><td>-7</td><td>193</td><td>243</td><td>4993</td></tr><tr><td>P</td><td>0,990</td><td>0,005</td><td>0,004</td><td>0,001</td></tr></table>	X	-7	193	243	4993	P	0,990	0,005	0,004	0,001		
X	-7	193	243	4993									
P	0,990	0,005	0,004	0,001									
19	<table><tr><td>X</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>P</td><td>0,1</td><td>0,9</td></tr></table>	X	3	4	P	0,1	0,9						
X	3	4											
P	0,1	0,9											
20	$M(X) = \frac{7}{2}; D(X) = \frac{35}{12} .$												
21	$M(X) = 1,6; D(X) = 0,96; \sigma(X) = 0,9799$												

2. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева.

Номер задания	1	2	3	4	5
Ответ	$P(X \leq 3,6) \geq 0,14;$ $M(X) = 3,118.$	$P \geq 0,7.$	$P(X \leq 80) \geq \frac{4}{5}$	$P(X > 1\,000\,000) \leq 0,36$	$P(X > 5) \leq 0,16.$

Номер задания	6	7	8	9	10	11	
Ответ	$P(X \leq 60) \geq 0,917$	$P \geq 0,75$	$P \geq 0,9$	$P \geq \frac{4}{9}$	$n \geq 1250$	800	

ГЛАВА 4
ПРАКТИКУМ В ФОРМАТЕ ЕГЭ
Базовый уровень

I. Классическое определение вероятности.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	0,25	0,75	0,25	0,25	0,25	0,	0,2	0,25	0,25	0,25
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	0,2	0,8	0,45	0,16	0,4	0,25	0,18	0,22	0,15	0,16
Номер задания	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ответ	0,7	0,45	0,05	0,02	0,15	0,28	0,2	0,25	0,25	0,2
Номер задания	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Ответ	0,05	0,125	0,92	0,88	0,96	0,8	0,99	0,998	0,26	0,3
Номер задания	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Ответ	0,15	0,18	0,2	0,3	0,5	0,2	0,25	0,2	0,03	0,02

II. Статистическое определение вероятности.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	0,1	0,15	0,05	0,02	0,92	0,88	0,99	0,998	0,1	0,15

III. Геометрическое определение вероятности.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ответ	0,2	0,86	0,08	0,0375	0,4325	0,25	0,33	0,5	0,17

IV. Противоположные события.

Номер задания	1	2	3	4
Ответ	0,12	0,26	0,78	0,83

V. Сумма и произведение событий.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	0,0625	0,0004	0,16	0,0625	0,09	0,0225	0,6	0,45	0,45	0,45

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

I. Классическое, статистическое, геометрическое определения вероятности.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	0,25	0,25	0,67	0,25	0,2	0,4	0,469	0,95	0,6	0,92
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	0,5	0,36	0,24	0,36	0,25	0,45	0,36	0,3	0,16	0,22
Номер задания	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ответ	0,3	0,7	0,25	0,125	0,4	0,2	0,125	0,16	0,79	0,33
Номер задания	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Ответ	0,1	0,93	0,04	0,05	0,5	6	0,33	0,5	0,33	0,83
Номер задания	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Ответ	0,375	0,125	0,375	0,5	0,83	0,17	0,33	0,17	0,5	0,3
Номер задания	51	52	56	54	55	56	57	58	59	60
Ответ	0,2	0,25	0,8	0,2	0,9	0,25	0,036	0,875	0,125	0,009
Номер задания	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Ответ	0,006	0,12	0,42	0,48	0,72	0,25	0,67	0,33	0,5	0,5
Номер задания	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Ответ	0,33	0,67	0,17	18	4	0,14	0,5	0,083	0,11	0,14
Номер задания	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
Ответ	19	0,53	0,44	0,17	3	0,25	0,25	0,5	0,75	0,5
Номер задания	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Ответ	0,125	0,125	0,375	0,125	0,5	0,5	0,5	0,5	16	0,25

Номер задания	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
Ответ	0,3125	0,3125	0,006	0,006	0,498	0,504	0,995	0,985	0,92	0,08
Номер задания	111	112								
Ответ	0,97	0,92								

**II. Полная группа событий.
Сумма и произведение событий.**

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	0,2	0,27	0,53	0,0625	0,1	0,2	0,3	0,45	0,33	0,05
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	0,7056	0,408	0,32	0,33	0,64	0,36	0,657	0,91	0,01	0,11
Номер задания	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ответ	0,192	0,91	3	4	3	3	4	5	0,24	0,65
Номер задания	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Ответ	0,8649	0,0036	0,0591	0,04	0,91	0,992	0,973	0,72	0,56	0,91
Номер задания	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Ответ	0,9951	0,3249	0,9831	0,343	0,064	0,992	0,65	0,52	0,33	0,68
Номер задания	51	52	56	54	55	56	57	58	59	60
Ответ	0,1	0,64	0,1	0,7	0,9	0,504	0,902	0,496	0,02	0,0441
Номер задания	61	62	63	64	65					
Ответ	0,0243	0,33	0,02304	0,096	0,384					

**III. Формула полной вероятности.
Формула Байеса.**

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	0,392	0,68	0,52	0,019	0,973	0,0296	0,0545	0,2	0,43	0,31

Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ответ	0,42	0,58	0,63	0,73	0,05	0,6	0,4	0,2	0,75	0,08
Номер задания	21	22	23							
Ответ	0,11	0,125	0,17							

IV. Схема Бернулли.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ответ	16	2,1	1,5	0,324	0,035	1,05	1,25	0,12	1,3

V. Элементы математической статистики.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	0	0,5	- 0,1	34,5	85,2	0,6	0,4	0,625	0,25	0,64
Номер задания	11	12	13							
Ответ	0,625	0,16	0,284							

VI. Задачи повышенного уровня сложности.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	0,3	0,4	0,5	0,8	0,9	0,875	0,125	0,0625	0,08	87,5
Номер задания	11	12	13							
Ответ	25	60	42,5							

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика.– М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.
2. Высоцкий И.Р., Яценко И.В. ЕГЭ 2012. Задачи В10. Теория вероятностей. Рабочая тетрадь / под ред. А.Л. Семенова и И.Я. Яценко. – М.: МЦНМО, 2012. – 48 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. образование, 2006. – 404 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В.Е. Гмурман . – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 479 с.: ил.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с. – (Высшее образование).
9. Тюрин Ю.Н. и др. Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учебное пособие для 10-11 классов общеобразовательных учреждений / Ю.Н. тюринбн, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Яценко. – М.: МЦНМО, 2014. – 248 с.
10. Сдам ГИА. Образовательный портал для подготовки к экзаменам – <https://ege.sdamgia.ru>
11. Федеральный институт педагогических измерений – <http://www.fipi.ru>